

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Tese de Doutorado

**Existência, Concentração e Multiplicidade de
Soluções para Problemas Não-Locais do Tipo
Kirchhoff.**

João Rodrigues dos Santos Júnior

Dezembro de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

João Rodrigues dos Santos Júnior

**Existência, Concentração e Multiplicidade de
Soluções para Problemas Não-Locais do Tipo
Kirchhoff.**

Tese apresentada ao Curso de Doutorado
em Matemática em associação ampla UFPA -
UFAM, como pré-requisito para a obtenção
do Título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Dezembro de 2013

Júnior, João Rodrigues dos Santos, 1987 -
Existência, Concentração e Multiplicidade de
Soluções para Problemas Não-Locais do Tipo Kirchhoff
/ João Rodrigues dos Santos Júnior. - 2013.

Orientador: Giovany de Jesus Malcher Figueiredo.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará,
Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de
Pós-Graduação em Matemática (Doutorado), Belém,
2013.

1. Equações Diferenciais Parciais. I . Título.

CDD 23. ed. 515.35

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

João Rodrigues dos Santos Júnior

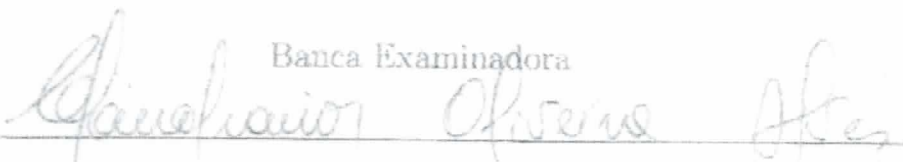
Existência, Concentração e Multiplicidade de Soluções para
Problemas Não-Locais do Tipo Kirchhoff

Tese apresentada ao Curso de Doutorado
em Matemática em associação ampla
UFPA/UFAM, como pré-requisito para a ob-
tenção do Título de Doutor em Matemática.

Data da defesa: 5 de dezembro de 2013.

Conceito: APROVADO

Banca Examinadora



Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG



Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG



Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)

Universidade Federal do Pará - UFPA



Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki

Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF



Prof. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento

Universidade Federal do Pará - UFPA

Dedicatória

A minha amada família, Lourdes, Miguel, Jéssica e Juliana.

Agradecimentos

Ao Senhor Jesus, pela misericórdia, pela graça e pelo amor. Por aliviar meu fardo nos momentos de angústia e incerteza. Obrigado Senhor.

A minha esposa, Jéssica, pelo amor, pela paciência, pela cumplicidade, pelo companheirismo, por adiar seus planos profissionais para estar ao meu lado e por ser minha fiel companheira em cada momento da vida.

Aos meus pais, Miguel e Lourdes, e minha irmã, Juliana, por todo o suporte e amor sem o quais eu não teria conseguido desempenhar a tão árdua tarefa de escrever este manuscrito. Por sempre estarem ao meu lado nos momentos de alegria e nos momentos de tristeza.

Ao meu orientador, Giovany, por me introduzir nesse mundo tão interessante das equações diferenciais parciais elípticas e me instruir no caminho da pesquisa.

Aos professores da Faculdade de Matemática, do PPGME e do PDM, pelas conversas acadêmicas, disciplinas ministradas e momentos compartilhados.

Aos meus amigos, que de uma forma especial fizeram parte de minha jornada, Amanda Suellen (Professorinha Amanda), Cláudia Aline (apelido em construção), Denilson Pereira (Botinho, Botilson ou Chihuahua guia), Diego Souza (Diegão), Joelma Morbach (Professora Joelma), Kelmem Barroso (Kelmém, Queomem ou Caubi), Liliane Ribeiro (Lili), Marcel Nascimento (ainda não tem apelido), Rafael Abreu (Mister Rafa), Samuelle Rubino (Samuér) e a todos os demais que, mesmo não citados, deixaram boas lembranças.

Aos colaboradores de pesquisa (e amigos), Giovany M. Figueiredo, Francisco Júlio S. A. Corrêa, Amanda S. S. Corrêa, Antonio Suárez, Cristian Rodrigo Morales, Manuel Delgado, Marcos Tadeu e Norihisa Ikoma, por me honrarem com a oportunidade de pesquisar (e aprender muito) com vocês e por abrirem as

portas no início de minha trajetória como pesquisador.

Aos professores Claudianor O. Alves, Francisco Júlio S. A. Corrêa, Giovany M. Figueiredo, Olimpio H. Miyagaki e Rúbia Nascimento, por aceitarem avaliar este trabalho e contribuir para a melhoria do mesmo.

A Capes e aos cidadãos brasileiros, por financiarem meus estudos. Pela oportunidade que me deram, de morar e estudar em um País fascinante chamado Espanha.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos existência, multiplicidade e comportamento de concentração de soluções para a seguinte classe de problemas

$$(PNL) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon u = K(x)f(u), \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro pequeno e \mathcal{L}_ε é um operador não-local definido por

$$(ONL) \quad \mathcal{L}_\varepsilon u = M \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^3} \int_\Omega V(x)u^2 dx \right) [-\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u].$$

Assumimos que M , V , K e f são funções apenas contínuas satisfazendo hipóteses que serão enunciadas ao longo do texto e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ é um domínio suave.

Palavras chaves: Problemas do tipo Schrödinger-Kirchhoff; Método Variacional; Teoria de Lusternik-Schnirelmann; Método de iteração de Moser; Solução Nodal.

Abstract

In this work, we will study existence, multiplicity and concentration behavior of solutions for the following class of problems

$$(PNL) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon u = K(x)f(u), \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

where $\varepsilon > 0$ is a small parameter and \mathcal{L}_ε is a nonlocal operator defined by

$$(ONL) \quad \mathcal{L}_\varepsilon u = M \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^3} \int_\Omega V(x)u^2 dx \right) [-\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u].$$

We assume that M , V , K and f are just continuous functions satisfying hypotheses which will be enunciate throughout the text and $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ is a smooth domain.

Key Words: Schrödinger-Kirchhoff Type Problems; Variational Methods; Lusternik-Schnirelmann Theory; Moser's Iteration Method; Nodal Solution.

Conteúdo

Introdução	1
Notações	16
1 Um problema não-local via método de penalização	17
1.1 Introdução	17
1.2 Um problema auxiliar	19
1.3 O problema autônomo	21
1.3.1 Estrutura variacional e notações	21
1.3.2 Solução ground-state para o problema autônomo	23
1.4 Existência de solução para o problema auxiliar	37
1.4.1 Resultados preliminares	37
1.4.2 Condição Palais-Smale	44
1.5 Multiplicidade de soluções para o problema auxiliar	50
1.5.1 Resultados preliminares	50
1.5.2 Resultado de multiplicidade de soluções para o problema auxiliar	59
1.6 Demonstração do principal Teorema do capítulo 1	60
2 Domínio expandido	68
2.1 Introdução	68
2.2 O problema limite	69

2.3	Estrutura variacional	70
2.4	Resultados preliminares	71
2.5	Existência de solução ground-state	73
2.6	Comportamento dos níveis minimax	74
2.7	Multiplicidade de Soluções	80
3	Potencial nulo no infinito	86
3.1	Introdução	86
3.2	Resultados Preliminares	88
3.2.1	Estrutura variacional	88
3.2.2	Preliminares: multiplicidade de soluções	90
3.2.3	Lemas técnicos	95
3.3	Existência e multiplicidade de soluções	103
A	Sobre as hipóteses	109
1.0.1	Consequências e comparações	109
1.0.2	Exemplos	117
B	Categoria relativa	119
2.0.3	Definições	119
2.0.4	Propriedades da categoria	120
C	Grau topológico de Brouwer	122
3.0.5	Caso regular	122
3.0.6	Caso singular	123
3.0.7	Caso geral	125
3.0.8	Propriedades do grau de Brouwer	125

Introdução

Neste trabalho, estudaremos existência, multiplicidade e comportamento de concentração de soluções para a seguinte classe de problemas

$$(PNL) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon u = K(x)f(u), \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro pequeno e \mathcal{L}_ε é um operador não-local definido por

$$(ONL) \quad \mathcal{L}_\varepsilon u = M \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^3} \int_\Omega V(x)u^2 dx \right) [-\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u].$$

Assumimos que M, V, K e f são funções contínuas satisfazendo hipóteses que serão enunciadas ao longo do texto e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ é um domínio suave.

No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^3$, $M \equiv 1$ e $K \equiv 1$, obtemos o problema de Schrödinger estacionário

$$(PSE) \quad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = f(u), \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Problemas do tipo (PSE) aparecem, por exemplo, quando se busca uma onda viajante para a equação

$$(ES) \quad ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -h^2 \Delta \psi + V(x)\psi - |\psi|^{p-2}\psi \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

proposta pelo físico austríaco Erwin Schrödinger (1887-1961), em [69] e [70], como modelo para o comportamento de uma partícula carregada sob a ação de um campo de forças.

Em (ES) os símbolos i, h, V e ψ têm os seguintes significados: i é a unidade imaginária, h é a constante de Planck, V é a energia potencial do campo e ψ é a função de onda da partícula. Além disso, $p \in (2, \infty)$ se $N = 1$ ou $N = 2$ e $p \in (2, 2^*)$ se $N \geq 3$, com $2^* := 2N/(N - 2)$.

Apenas para citar alguns exemplos de aplicações, destacamos que a equação em (ES) também aparece no estudo de óptica não-linear, física de plasmas e matérias condensadas, ver [17].

Uma onda viajante para (ES) é uma solução da forma

$$\psi(t, x) = \exp\left(\frac{-i\lambda t}{h}\right)u(x). \quad (1)$$

Desse modo, a função ψ em (1) é uma onda viajante para (ES) se, e somente se, u é uma solução do problema elíptico

$$(PE) \quad \begin{cases} -h^2\Delta u + V(x)u = |u|^{p-2}u, \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Pontuamos que problemas do tipo (PSE) têm sido extensivamente estudados nos últimos anos. De fato, motivado por Floer e Weinstein [46], Rabinowitz, em [67], usou uma abordagem variacional baseada em uma variante do Teorema do Passo da Montanha para provar a existência de solução ground-state de (PSE) quando o parâmetro ε é suficientemente pequeno, $f \in C^2$ é uma não-linearidade superlinear subcrítica verificando a condição de Ambrosetti-Rabinowitz

$$(AR) \quad 0 \leq \theta F(t) := \theta \int_0^t f(s)ds \leq f(t)t,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e algum $\theta > 2$. O potencial V é uma aplicação satisfazendo a seguinte condição global

$$(R) \quad 0 < V_0 := \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) < \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x).$$

Wang, em [75], mostrou que os pontos de máximo x_ε das soluções u_ε obtidas em [67] apresentam o seguinte comportamento de concentração

$$(CC) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V(x_\varepsilon) = V_0,$$

ver também [16] e [17].

Posteriormente, Del Pino e Felmer, em [39], mostraram um resultado de existência e comportamento de concentração de soluções para (PSE) quando ε é pequeno, usando método variacional aliado a um argumento de penalização. Em

[39], a não-linearidade considerada se comporta como em [67], porém a aplicação V satisfaz uma condição local, dada por

$$(DF) \quad \inf_{x \in \Omega} V(x) < \min_{x \in \partial\Omega} V(x),$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado. Ver [11], para a versão complexa de (PSE) , envolvendo uma condição análoga a (DF) .

Resultados de multiplicidade para (PSE) envolvendo a topologia de determinados conjuntos relacionados ao potencial V podem ser encontrados, por exemplo, em [24], [35], [36] e suas referências.

A versão de (PSE) envolvendo o operador p-Laplaciano foi investigada, por exemplo, em [7], [8], [9], [73] e suas referências. Para o operador Biharmônico, citamos [65] e suas referências.

Quando consideramos $\varepsilon = 1$, $V \equiv 0$ e $K \equiv 1$ em (PNL) , estamos lidando com o seguinte problema não-local do tipo Kirchhoff

$$(PK) \quad \begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right) \Delta u = f(u), \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Esta última classe de problemas modela algumas situações em física e engenharia. De fato, em 1883, o físico alemão Gustav Kirchhoff (1824-1887) propôs, em [52], o seguinte modelo unidimensional para pequenas oscilações transversais de uma corda elástica com densidade linear constante e extremos fixados

$$(K) \quad \rho u_{tt} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) u_{xx} = 0.$$

Em (K) os parâmetros L , h , E , ρ e P_0 têm os seguintes significados: L é o comprimento da corda, h é a área de seção transversal da corda, E é o módulo de Young do material que compõe a corda, ρ é a densidade de massa e P_0 é a tensão inicial. Além disso, $u(x, t)$ denota o deslocamento sofrido pelo ponto x no instante t , em relação a posição de repouso.

A equação em (K) estende a clássica equação da onda de D'Alembert por que considera o efeito gerado pela mudança no comprimento da corda durante

as oscilações. Mais especificamente, Kirchhoff percebeu que a variação da tensão na corda ao longo do tempo induz uma dependência do quadrado da norma, em $L^2(0, L)$, do gradiente de u . Posteriormente, Woinowsky e Krieger incorporaram esta correção não-linear na clássica equação da viga de Euler-Bernoulli, ver [18] e [19].

A versão N -dimensional de (K) , com termo de reação não-nulo, é dada por

$$(VND) \quad \begin{cases} u_{tt} - \left(m_0 + b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right) \Delta u = f(u), \Omega \times (0, T) \\ u = 0, \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \Omega. \end{cases}$$

Tal equação modela pequenas vibrações transversais de membranas elásticas com densidade superficial constante e bordo fixado, ver [55].

Problemas do tipo (VND) passaram a chamar a atenção da comunidade científica, principalmente, após o pioneiro artigo de Jacques Lions em [56], o qual foi o primeiro a usar artilharia de análise funcional não-linear para atacá-los.

Do ponto de vista estacionário, muitos trabalhos concernentes a classe de problemas em (PK) foram publicados nos últimos 10 anos. No interessante artigo [5]; Alves, Corrêa e Ma, dão um primeiro passo rumo a compreensão do comportamento dessa classe de problemas. Em [5], são considerados os problemas do tipo linear e potência. Usando um argumento baseado em homogeneidade, os autores mostram que o número de soluções do problema elíptico está relacionado com o número de soluções de uma equação algébrica envolvendo a função M . No mesmo artigo, prova-se a existência de solução positiva via técnicas de truncamento, Teorema do Passo da Montanha e estimativas de Gidas-Spruck [47], quando f é superlinear subcrítica, M é mais geral do que a função afim e Ω é limitado. Ver também [34], para o caso côncavo-convexo subcrítico.

Argumentos de truncamento aliados ao Teorema do Passo da Montanha também são usados em [41] e [59].

O caso crítico com domínio limitado foi considerado, por exemplo, em [4], [41], [45], [54] e suas referências. Para domínios ilimitados citamos [20], [51] e suas referências. Ver [32], [38] e suas referências, para problemas do tipo p-Kirchhoff.

Problemas envolvendo membranas elásticas compostas por dois materiais

distintos (cada um dos quais tendo densidade superficial constante) e que interagem apenas na fronteira, são conhecidos como problemas de transmissão na fronteira. No caso estacionário, tais problemas foram considerados em [60].

Problemas envolvendo membranas elásticas com fibras confeccionadas por material não-homogêneo (densidade superficial não-constante) foram considerados, no caso estacionário, em [42] e [63].

Recentemente, alguns autores têm investigado problemas do tipo (*PNL*), os quais passaram a ser conhecidos na literatura como problemas de Schrödinger-Kirchhoff, ver [64] e [77]. A seguir, ressaltamos alguns trabalhos pioneiros neste estudo.

Por exemplo, He e Zou, em [49], usando teoria de Lusternik-Schnirelmann e métodos minimax, provaram um resultado de multiplicidade e comportamento de concentração de soluções positivas para o problema

$$(HZ) \quad \begin{cases} - \left(\varepsilon^2 a + b\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \right) \Delta u + V(x)u = f(u), \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

assumindo, que $f \in C^1$ satisfaz (*AR*), tem um crescimento 3-superlinear subcrítico, $t \mapsto f(t)/t^3$ é crescente,

$$f'(s)s^2 - 3f(s)s \geq Ms^\sigma, \quad \forall s \geq 0$$

e o potencial V verifica a condição (*R*), introduzida em [67].

Em [74]; Wang, Tian, Xu e Zhang estudaram o problema

$$(WTXZ) \quad \begin{cases} - \left(\varepsilon^2 a + b\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \right) \Delta u + V(x)u = \lambda f(u) + |u|^4 u, \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

considerando f apenas contínua, com crescimento 3-superlinear subcrítico no infinito, satisfazendo uma condição mais fraca que (*AR*) e o potencial V verificando (*R*).

Sob essas hipóteses, os autores mostraram que (*WTXZ*) tem múltiplas soluções positivas quando λ é suficientemente grande, usando teoria de categoria, métodos minimax e uma técnica introduzida por Szulkin e Weth, em [72].

Alves e Figueiredo, em [10], investigaram soluções positivas do problema

$$(AF) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_1 u = \lambda f(u), \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

onde \mathcal{L}_ε , para $\varepsilon > 0$, foi definido em (ONL). Assumindo que $M(t) \geq m_0 > 0$ é crescente e assintoticamente linear no infinito, as aplicações $t \mapsto (1/2)\widehat{M}(t) - (1/4)M(t)t$ e $t \mapsto M(t)/t$ são, respectivamente, crescente e decrescente e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \frac{1}{\theta}M(t)t \right] = \infty;$$

$V = V_p - W$, onde V_p é positiva \mathbb{Z}^3 -periódica e $W \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ e que f é 3-superlinear no infinito, subcrítica, satisfaz (AR) com $\theta > 4$ e $t \mapsto f(t)/t^3$ é crescente, eles mostraram a existência de uma solução positiva via Teorema do Passo da Montanha, para todo $\lambda > 0$.

Outros resultados para problemas do tipo Schrödinger-Kirchhoff podem ser vistos em [32], [33], [50], [53], [64], [77] e suas referências.

Motivados pelas dificuldades envolvidas e pelos resultados citados anteriormente, dedicamos este trabalho ao estudo de algumas classes de problemas do tipo Schrödinger-Kirchhoff, as quais passamos a discutir.

No capítulo 1, tratamos um problema do tipo (PNL), com $\Omega = \mathbb{R}^3$ e $K \equiv 1$. Para sermos mais precisos, estudamos o problema

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon u = f(u), \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

com \mathcal{L}_ε definido em (ONL). As funções $M : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são aplicações contínuas satisfazendo as seguintes hipóteses:

(M₁) M é uma função não-decrescente.

(M₂) Existe $m_0 > 0$ tal que a aplicação

$$t \mapsto \frac{[M(t) - m_0]}{t}$$

é não-crescente.

O potencial V satisfaz:

(V₁) $V_0 := \inf_{x \in \mathbb{R}^3} V(x) > 0$.

(V₂) Para cada $\delta > 0$ existe um domínio lipschitziano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado tal que

$$V_0 < \min_{x \in \partial\Omega} V(x), \quad \Pi = \{x \in \Omega : V(x) = V_0\} \neq \emptyset$$

e

$$\Pi_\delta = \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, \Pi) \leq \delta\} \subset \Omega.$$

Assumimos que a função f se anula em $(-\infty, 0)$ e, além disso, satisfaz as hipóteses abaixo:

(f₁)

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t^3} = 0.$$

(f₂) Existe $q \in (4, 6)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = 0.$$

(f₃) Existe $\theta \in (4, 6)$ tal que

$$0 < \theta F(t) \leq f(t)t, \quad \forall t > 0.$$

(f₄) A aplicação

$$t \mapsto \frac{f(t)}{t^3}$$

é não-decrescente em $(0, \infty)$.

Para uma melhor compreensão das hipóteses acima e de suas consequências, remetemos o leitor ao Apêndice A.

O principal resultado do capítulo 1 é:

Teorema 0.0.1 *Suponha que a função M satisfaz $(M_1) - (M_2)$, o potencial V satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e a função f satisfaz $(f_1) - (f_4)$. Então, dado $\delta > 0$ existe $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\delta) > 0$ tal que o problema (P_ε) tem pelo menos $\text{cat}_{\Pi_\delta}(\Pi)$ soluções positivas,*

para todo $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$. Além disso, se u_ε denota uma dessas soluções positivas e $\eta_\varepsilon \in \mathbb{R}^3$ é seu ponto de máximo global, então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V(\eta_\varepsilon) = V_0.$$

Para comodidade do leitor, as hipóteses no teorema anterior serão enunciadas novamente no capítulo correspondente.

Enfatizamos que, ao menos em nosso conhecimento, até o presente trabalho, não existia na literatura disponível resultados envolvendo problemas do tipo Schrödinger-Kirchhoff, onde o potencial satisfaz uma hipótese como em (DF) , além disso, a hipótese (M_2) é uma hipótese que não aparece em outros trabalhos envolvendo problemas de Kirchhoff.

De fato, ao tentar adaptar o método de penalização ao problema (P_ε) , nos deparamos com sérias dificuldades que não aparecem no caso local (Laplaciano). A seguir, pontuaremos as novidades.

1) O efeito de competição gerado pela presença da função M nos obriga a exigir um crescimento 3-superlinear do termo de reação, o que contrasta com o crescimento superlinear no caso do Laplaciano. Esse fato em geral restringe a geometria do passo da montanha a dimensões 1, 2 e 3. Por esse motivo, alguns autores usam técnicas de truncamento para obter resultados de existência via passo da montanha para dimensões maiores do que 3, mas, com exceção de algumas situações que ocorrem quando se tem crescimento crítico (ver [41]), ao que parece, esse tipo de argumento acarreta em restrições sobre o tamanho do parâmetro b , no caso em que $M(t) = m_0 + bt$ (ver [21]). Resultados de não-existência para b grande e $N > 3$ foram obtidos em [44].

2) Sendo M uma função mais geral do que em [49] e [74], temos uma dificuldade adicional. Em geral, o limite fraco de sequências Palais-Smale não é solução fraca do problema autônomo. Em [10], os autores enfrentaram a mesma dificuldade sob hipóteses distintas na função M .

3) Desde que M e f são aplicações apenas contínuas, não devemos esperar que a variedade de Nehari \mathcal{M}_ε goze de uma estrutura diferenciável. Isso nos priva do uso de alguns argumentos clássicos de minimização sobre \mathcal{M}_ε , tornando o trabalho de minimizar sequências Palais-Smale sobre \mathcal{M}_ε altamente não-trivial.

Além disso, devido a ausência de uma parcela crítica no termo de reação somos obrigados a contornar algumas dificuldades para adaptar os argumentos de [72], as quais não aparecem em [74], ver Lemas 1.4.1, 1.4.2 e a demonstração do Teorema 1.5.1.

4) A dependência não-linear da norma de u em (P_ε) nos obriga a usar argumentos que não aparecem em [39] para mostrar que o funcional energia penalizado satisfaz a condição Palais-Smale, ver Lema 1.4.6.

5) A presença de M acarreta estimativas totalmente diferentes de [9] e [39], ver por exemplo a demonstração do Lema 1.4.2. Em particular, foi preciso um estudo minucioso das hipóteses sobre M , ver Apêndice A.

Neste sentido, nosso trabalho complementa os resultados encontrados em [10], [49] e [74].

Para finalizar, observamos que nossos resultados são novos mesmo no caso em que $M \equiv 1$, pois retiramos a diferenciabilidade de f . Além disso, o capítulo 1 desta tese originou um artigo intitulado “Multiplicity and concentration behavior of positive solutions for a Schrödinger-Kirchhoff type problem via penalization method”, o qual foi aceito para publicação na revista “ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations” no ano de 2014.

Benci e Cerami, em [28], investigaram existência e multiplicidade de soluções positivas para o problema

$$(BC)_\lambda \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^{p-1}, \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$, é um domínio limitado e suave, $\lambda > 0$ e $p \in (2, 2^*)$.

Em [28], mostra-se que considerando a mudança de variável $v(x) = \lambda^{1/(2-p)}u(x/\sqrt{\lambda})$, obtemos o seguinte problema equivalente

$$(BC) \quad \begin{cases} -\Delta v + v = v^{p-1}, \Omega_{\sqrt{\lambda}} \\ v \in H_0^1(\Omega_{\sqrt{\lambda}}), \end{cases}$$

onde $\Omega_{\sqrt{\lambda}} := \sqrt{\lambda}\Omega$.

Usando Teoria de Lusternik-Schnirelmann, os autores mostraram que o número de soluções de (BC) é afetado pela topologia do domínio Ω , desde que o parâmetro λ assuma valores suficientemente grandes. Posteriormente, em [27],

os mesmos autores melhoraram o resultado para uma classe mais geral de não-linearidades. Ver também [22], [37], [68] e suas referências.

Em [72], Szulkin e Weth revisitaram o problema em [27] e mostraram a existência de $1 + \text{cat}\Omega$ soluções positivas para o problema, com uma não-linearidade f mais geral (apenas contínua e sem a condição (AR)), desde que Ω tenha uma topologia não-trivial (não-contrátil) e os parâmetros envolvidos estejam em intervalos adequados.

Alves, em [2], considera a versão de (BC) para o operador p-laplaciano,

$$(A) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(u), \Omega_\lambda \\ u \in H_0^1(\Omega_\lambda). \end{cases}$$

Assumindo que $f \in C^1$ é superlinear subcrítica, satisfaz a condição (AR) com $\theta > p$ e

$$(HA) \quad f'(t)t - (p-1)f(t) \geq Ct^\eta, \quad \forall t > 0,$$

com η num intervalo adequado, o autor consegue provar os mesmos resultados obtidos em (BC) . Ressaltamos que nos argumentos em [2] a diferenciabilidade é fundamental. Outros resultados envolvendo o operador p-laplaciano podem ser vistos em [6] e suas referências.

Inspirados pelos resultados obtidos em [2], [27], [28] e [72], atacamos, no capítulo 2, uma versão não-local de (BC) . Mais especificamente, estudamos o problema (PNL) com $\Omega_\lambda := \lambda\Omega$ no lugar de Ω , $K \equiv V \equiv 1$ e $\varepsilon \equiv 1$. Ou seja, estudamos o problema

$$(P_{\Omega_\lambda}) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u = f(u), \Omega_\lambda \\ u \in H_0^1(\Omega_\lambda), \end{cases}$$

onde \mathcal{L} é um operador não-local definido por

$$\mathcal{L}u = M \left(\int_{\Omega_\lambda} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_\lambda} u^2 dx \right) [-\Delta u + u].$$

Entre outras hipóteses, as funções M e f satisfazem:

(M'_2) Existe $m_0 > 0$ tal que

$$M(t) \geq m_0, \quad \forall t \geq 0.$$

(M_2'') A aplicação

$$t \mapsto \frac{M(t)}{t}$$

é decrescente.

(f_5) f é uma função localmente Lipschitz-contínua em $(0, +\infty)$.

O principal resultado do capítulo 2 é:

Teorema 0.0.2 *Se a aplicação M satisfaz (M_1) , (M_2') e (M_2'') e a aplicação f satisfaz $(f_1) - (f_5)$ então existe $\lambda_* > 0$ tal que o problema (P_{Ω_λ}) admite ao menos $\text{cat}\Omega$ soluções positivas, para todo $\lambda \in [\lambda_*, \infty)$. Além disso, se $\bar{\Omega}$ não é contrátil então (P_{Ω_λ}) admite ao menos $1 + \text{cat}\Omega$ soluções positivas.*

As hipóteses do teorema anterior serão enunciadas novamente ao longo da tese. Abaixo pontuamos as novidades que surgem no estudo de (P_{Ω_λ}) .

1) Novamente a não-diferenciabilidade de M e f acarretam dificuldades que não aparecem em [2], [27] e [28]. Por exemplo, não podemos usar (HA) para obter resultados de compacidade sobre a variedade de Nehari. Para contornar esses impasses, nos inspiramos em [72] e em resultados obtidos no capítulo 1 (ver seção 2.2) .

2) A presença da função M requer cautela na obtenção de várias estimativas, isso gera dificuldades análogas as que enfrentamos no capítulo 1, entretanto, em comparação com o capítulo 1, aqui, fomos capazes de enfraquecer as hipóteses sobre M , ver Lema 1.0.1(ii) e Observação 1.0.1.

Em [57], Liu e Wang estudaram o problema

$$(LW) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f(u), \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Assumindo f contínua, superlinear subcrítica, tal que $t \mapsto f(t)/|t|$ é crescente e a primitiva F verifica $\lim_{|t| \rightarrow \infty} F(t)/t^2 = \infty$, os autores mostraram que (LW) admite uma solução nodal (muda de sinal) com energia mínima, sempre que $\lambda < \lambda_1$ e Ω é limitado.

Observamos que a existência de solução nodal para (LW) com energia mínima foi primeiramente estudada em [71], sob hipóteses mais fortes em f . Entretanto,

os argumentos em [71] não estavam completamente corretos, pois em geral, aplicações do tipo

$$E \mapsto \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_{\Omega} |\nabla u^{\pm}|^2$$

não são de classe C^1 , como é observado em [72].

A primeira prova correta da existência de solução nodal para (LW) com energia mínima, foi dada em [31], sob hipóteses mais fortes que em [57].

Outros artigos relacionados a existência de solução nodal com energia mínima para o caso local podem ser vistos em [3], [12], [13], [23], [25], [26] e suas referências.

Com relação a existência de solução nodal com energia mínima para problemas não-locais, existem poucos (e recentes) trabalhos na literatura. Citaremos dois deles.

Alves e Souto, em [14], estudaram o seguinte problema

$$(AS) \quad \begin{cases} -\Delta u + \phi_u u = f(u), \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado e, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, ϕ_u é um termo não-local obtido pelo Teorema de Lax-Milgram, o qual verifica algumas propriedades.

Assumindo que $f \in C^1$ é superlinear quasicrítica, $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)/t^4 = \infty$ e $t \mapsto f(t)/t^3$ é crescente em $|t|$, os autores mostraram, usando argumentos de minimização e Lema de deformação quantitativa, a existência de uma solução nodal com energia mínima, a qual possui exatamente dois domínios nodais.

Por outro lado, Figueiredo e Nascimento, em [43], estudaram a equação

$$(FN) \quad \begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right) \Delta u = f(u), \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Os autores consideraram $M \in C^1$ crescente, com $M(t) \geq m_0 > 0$ e $t \mapsto M(t)/t$ decrescente. A função $f \in C^1$ é superlinear subcrítica, verificando a condição (AR) e tal que $t \mapsto f(t)/t^3$ é crescente em $|t|$. Sob essas hipóteses, eles mostraram o mesmo resultado de (AS) para (FN) .

Ao menos em nosso conhecimento, não existem trabalhos investigando solução

nodal com energia mínima para problemas não-locais em domínios ilimitados. Essa lacuna será preenchida no capítulo 3 desta tese.

Consideramos $\Omega = \mathbb{R}^3$ e $\varepsilon = 1$ em (PNL) . Desta forma, trataremos o problema

$$(P) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_1 u = K(x)f(u), \mathbb{R}^3 \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

onde \mathcal{L}_1 é um operador não-local definido por

$$\mathcal{L}_1 u = M \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2 dx \right) [-\Delta u + V(x)u].$$

As funções V , K e f satisfazem as seguintes hipóteses:

(I) $V(x), K(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}^3$ e $K \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

(II) Se $\{A_n\} \subset \mathbb{R}^3$ é uma sequência de conjuntos de Borel tais que $|A_n| \leq R$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e algum $R > 0$, então

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{A_n \cap B_r^c(0)} K(x) dx = 0, \text{ uniformemente em } n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

(III) Uma das condições abaixo ocorre:

$$\frac{K}{V} \in L^\infty(\mathbb{R}^3), \quad (3)$$

ou existe $p \in (2, 6)$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{K(x)}{V(x)^{(6-p)/4}} = 0. \quad (4)$$

(f'_1)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t^3} = 0, \text{ se ocorre (3) ou (4), para algum } p \in (2, 4],$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-1}} = 0, \text{ se (4) ocorre para algum } p \in (4, 6).$$

(f'_2)

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^5} = 0.$$

(f'_3)

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{t^4} = +\infty.$$

(f'_4) A aplicação

$$t \mapsto \frac{f(t)}{|t|^3}$$

é não-decrescente em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Observamos que as hipóteses (I), (II) e (III) foram primeiramente consideradas em [15].

Enunciamos agora o principal resultado do capítulo 3:

Teorema 0.0.3 *Suponha que a função M é apenas contínua e satisfaz (M_1), (M'_2) e (M''_2), as aplicações V e K satisfazem (I) – (III) e a função f satisfaz (f'_1) – (f'_4). Então o problema (P) possui uma solução nodal de energia mínima. Além disso, se f é ímpar então (P) admite infinitas soluções (não necessariamente nodais).*

As hipóteses anteriores serão novamente enunciadas no capítulo 3. A seguir pontuamos as novidades e dificuldades envolvidas no estudo de (P).

1) Devido a presença do termo não-local temos que $J(u) > J(u^+) + J(u^-)$ e, pelo mesmo motivo, $J'(u^+)u^+ < 0$ e $J'(u^-)u^- < 0$ para todo u num subconjunto \mathcal{M} da variedade de Nehari \mathcal{N} de J , onde buscaremos soluções de (P), com J sendo o funcional energia associado a (P). Tais fatos nos impedem de usar argumentos de minimização do mesmo modo que em [13], [26] e [72]. Em [14] e [43] é enfrentada a mesma dificuldade. Neste sentido novas estimativas foram necessárias, como por exemplo as que aparecem na demonstração do Teorema 3.1.1.

2) Diferentemente de [14] e [43], em nosso caso, as funções M e f não são diferenciáveis, assim não devemos esperar a existência de uma estrutura diferenciável nos conjuntos \mathcal{N} e \mathcal{M} . Em verdade, mesmo quando M e f são diferenciáveis, não podemos garantir a diferenciabilidade de \mathcal{M} em E pois as aplicações $u \mapsto u^\pm$ são apenas contínuas em E , para maiores detalhes a respeito

deste assunto remetemos o leitor a [25], seção 3. Para contornar essa não-diferenciabilidade, adaptamos ao nosso caso as idéias de [72]. Ver, por exemplo, a parte 2 da prova do Teorema 3.1.1 .

3) Uma vez que não exigimos a clássica condição de Ambrosetti-Rabinowitz (*AR*) sobre f , não é trivial que sequências Palais-Smale sejam limitadas. Além disso, também temos problemas com falta de compacidade devido estarmos trabalhando em \mathbb{R}^3 . Superamos essas dificuldades, respectivamente, com as idéias em [72] e [15].

4) Diferentemente de alguns artigos, ver por exemplo [14] e [43], não fazemos uso do Teorema de Miranda (ver [61]), na busca por pontos críticos da função $g(t, s) = J(tu^+ + su^-)$. Em vez disso, usamos um método iterativo e as propriedades de J para construir uma sequência cujo limite é ponto crítico de g , ver Lema 3.2.4.

5) Permanece aberta a questão do número de domínios nodais da solução nodal de energia mínima encontrada no capítulo 3 desta tese. De fato, as dificuldades mencionadas em 1) não nos permitem usar argumentos como em [13], [26] e [72].

Encerramos esta tese com alguns apêndices que têm como objetivo esclarecer alguns dos resultados usados ao longo do texto. No Apêndice A, discutimos mais detalhadamente as hipóteses requeridas das funções M e f . No Apêndice B, enunciamos algumas definições e propriedades da categoria relativa e no Apêndice C fazemos um pequeno resumo das principais propriedades do grau topológico de Brouwer.

Notações

C, \tilde{C} e $C_i :=$ constantes positivas cujo valor exato não é relevante.

$|A| :=$ medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^N$.

$\int_A f :=$ integral de Lebesgue de uma função f sobre o conjunto A .

$u^+ := \max\{u, 0\}$.

$u^- := \min\{u, 0\}$.

$\square :=$ fim da demonstração de uma afirmação.

$\blacksquare :=$ fim da demonstração de um teorema, proposição, lema ou corolário.

$|u|_s :=$ norma de u em $L^s(\mathbb{R}^3)$.

$\tilde{u} :=$ extensão de u a \mathbb{R}^3 , nula fora do domínio de u .

$cat\Omega :=$ categoria de $\bar{\Omega}$ relativa a $\bar{\Omega}$.

$\chi_\Omega :=$ função característica do conjunto Ω .

$supp u :=$ suporte de uma função u .

$S_\varphi :=$ conjunto dos pontos críticos de uma aplicação diferenciável φ .

Capítulo 1

Um problema não-local via método de penalização

1.1 Introdução

Como já foi mencionado, neste primeiro capítulo devemos focar nossa atenção sobre questões de existência, multiplicidade e comportamento de concentração de soluções positivas para o seguinte problema

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon u = f(u), \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro pequeno, \mathcal{L}_ε é um operador não-local definido por

$$\mathcal{L}_\varepsilon u = M \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{\mathbb{R}^3} V(x) u^2 dx \right) [-\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u].$$

As funções $M : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são aplicações contínuas satisfazendo as seguintes hipóteses:

(M_1) M é uma função crescente.

(M_2) Existe $m_0 > 0$ tal que a aplicação

$$t \mapsto \frac{[M(t) - m_0]}{t}$$

é não-crescente.

O potencial V é uma função contínua satisfazendo:

(V₁) $V_0 := \inf_{x \in \mathbb{R}^3} V(x) > 0$.

(V₂) Para cada $\delta > 0$ existe um domínio lipschitziano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado tal que

$$V_0 < \min_{x \in \partial\Omega} V(x), \quad \Pi = \{x \in \Omega : V(x) = V_0\} \neq \emptyset$$

e

$$\Pi_\delta = \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, \Pi) \leq \delta\} \subset \Omega.$$

Uma vez que estamos interessados em obter soluções positivas, assumimos que a função f se anula em $(-\infty, 0)$ e, além disso, satisfaz as hipóteses abaixo:

(f₁)

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t^3} = 0.$$

(f₂) Existe $q \in (4, 6)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = 0.$$

(f₃) Existe $\theta \in (4, 6)$ tal que

$$0 < \theta F(t) \leq f(t)t, \quad \forall t > 0.$$

(f₄) A aplicação

$$t \mapsto \frac{f(t)}{t^3}$$

é não-decrescente em $(0, \infty)$.

Para uma melhor compreensão das hipóteses acima e de suas consequências, remetemos o leitor ao Apêndice A.

Considerando a mudança de variável $x = \varepsilon z$ em (P_ε) , obtemos o problema equivalente

$$(\tilde{P}_\varepsilon) \quad \begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon u = f(u), & \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

onde

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon u = M \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u^2 dx \right) [-\Delta u + V(\varepsilon x)u].$$

A seguir, enunciamos o principal resultado deste capítulo. Entretanto, antes do seu enunciado, recomendamos a leitura do Apêndice B onde recordamos a definição de categoria.

Teorema 1.1.1 *Suponha que a função M satisfaz $(M_1) - (M_2)$, o potencial V satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e a função f satisfaz $(f_1) - (f_4)$. Então, dado $\delta > 0$ existe $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\delta) > 0$ tal que o problema (P_ε) tem pelo menos $\text{cat}_{\Pi_\delta}(\Pi)$ soluções positivas, para todo $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$. Além disso, se u_ε denota uma dessas soluções positivas e $\eta_\varepsilon \in \mathbb{R}^3$ é seu ponto de máximo global, então*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V(\eta_\varepsilon) = V_0.$$

Este capítulo está organizado como segue. Na seção 1.2 definimos um problema auxiliar adequado. Na seção 1.3 estudamos o problema autônomo associado e obtemos um resultado de compacidade que será usado na seção 1.5. Na seção 1.4 provamos a existência de uma solução ground-state (energia mínima) para o problema auxiliar. Na seção 1.5 relacionamos o número de soluções do problema auxiliar com a topologia do conjunto Π usando teoria de categoria de Lusternik-Schnirelmann [58]. Na seção 1.6 provamos o principal resultado usando método de iteração de Moser [62].

1.2 Um problema auxiliar

Em nossa abordagem para atacar o problema (P_ε) , adaptaremos um argumento introduzido em [39]. Isto é, inicialmente faremos uma penalização na não-linearidade f , adequada ao nosso caso, e estudaremos um problema auxiliar $(P_{\varepsilon,A})$. Em um segundo momento, trataremos de mostrar que as soluções obtidas para $(P_{\varepsilon,A})$ são também soluções de (P_ε) .

Para tanto, sejam $k > 1/m_0$ e $a > 0$ tais que $f(a) = (V_0/k)a$, onde m_0 é dado em (M_2) e V_0 é dado em (V_1) . Note que um tal a existe devido às hipóteses (f_1) e (f_4) .

Agora, penalizamos a função f , definindo

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & , \quad t \leq a, \\ (V_0/k)t & , \quad t > a. \end{cases}$$

Sendo assim, para cada $\delta > 0$ dado, definimos

$$g(x, t) = \chi_\Omega(x)f(t) + (1 - \chi_\Omega(x))\tilde{f}(t),$$

onde Ω é o conjunto (que depende de δ) introduzido na hipótese (V_2) .

Segue da definição, das hipóteses $(f_1) - (f_4)$ e de (V_1) que g é uma função Carathéodory e satisfaz:

(g_1)

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(x, t)}{t^3} = 0, \text{ uniformemente em } x \in \mathbb{R}^3.$$

(g_2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(x, t)}{t^{q-1}} = 0, \text{ uniformemente em } x \in \mathbb{R}^3.$$

(g_3) (i)

$$0 \leq \theta G(x, t) < g(x, t)t, \quad \forall x \in \Omega \text{ e } \forall t > 0$$

(ii)

$$0 \leq 2G(x, t) \leq g(x, t)t \leq \frac{1}{k}V(x)t^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \text{ e } \forall t > 0.$$

(g_4) Para cada $x \in \Omega$ a aplicação $t \mapsto g(x, t)/t^3$ é não-decrescente em $(0, \infty)$ e para cada $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ a aplicação $t \mapsto g(x, t)/t^3$ é não-decrescente em $(0, a)$.

Ainda pela definição de g , temos $g(x, t) \leq f(t)$ para todos $x \in \mathbb{R}^3$ e $t \geq 0$ e $g(x, t) = 0$ para todos $x \in \mathbb{R}^3$ e $t \in (-\infty, 0)$.

Observação 1.2.1 *O ponto fundamental da penalização acima é que construímos uma não-linearidade que tem um crescimento 3-superlinear em t para cada $x \in \Omega$, necessário para obter a segunda geometria do passo da montanha, porém é linear em t , para cada $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ e $t \geq a$, assim como em [39], o que nos permite provar a condição Palais-Smale.*

Ao longo deste capítulo nosso trabalho se dividirá em duas partes. A primeira parte consiste em estudar a existência e multiplicidade de soluções positivas para o problema auxiliar

$$(P_{\varepsilon,A}) \quad \begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon u = g(\varepsilon x, u), & \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

o que será feito nas seções 1.4 e 1.5. A segunda parte consiste em mostrar que as soluções u_ε obtidas para $(P_{\varepsilon,A})$ possuem um comportamento de concentração e verificam $u_\varepsilon(x) < a$ para cada $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, portanto, são também soluções de (\tilde{P}_ε) , isso é feito na seção 1.6.

1.3 O problema autônomo

1.3.1 Estrutura variacional e notações

Como veremos na seção 1.5, para relacionar o número de soluções de (P_ε) com a topologia do conjunto dos pontos de mínimo global do potencial V , é importante fazer um estudo a respeito da existência de soluções ground-state positivas e do comportamento de sequências minimizantes sobre a variedade de Nehari associados ao caso autônomo do problema (\tilde{P}_ε) . Em vista disso, dedicaremos esta seção ao estudo do problema

$$(P_\mu) \quad \begin{cases} \mathfrak{L}_\mu u = f(u), & \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

onde, para cada $\mu > 0$,

$$\mathfrak{L}_\mu u := M \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \mu u^2 dx \right) [-\Delta u + \mu u].$$

Investigaremos as soluções de (P_μ) buscando pontos críticos do funcional

$$I_\mu(u) = \frac{1}{2} \widehat{M} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \mu u^2 \right) - \int_{\mathbb{R}^3} F(u),$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds$ e $F(t) = \int_0^t f(s) ds$, o qual está bem definido sobre o espaço $H_\mu = H^1(\mathbb{R}^3)$, munido do produto interno

$$(u, v)_\mu = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v + \int_{\mathbb{R}^3} \mu uv,$$

e da norma proveniente

$$\|u\|_\mu^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \mu u^2.$$

Uma vez que, para cada $\mu > 0$, a norma $\|\cdot\|_\mu$ é equivalente a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^3)$, temos que $(H_\mu, (\cdot, \cdot)_\mu)$ é um espaço de Hilbert.

Por outro lado, desde que M e f são contínuas, o funcional I_μ é de classe $C^1(H_\mu, \mathbb{R})$ e

$$I'_\mu(u)v = M(\|u\|_\mu^2)(u, v)_\mu - \int_{\mathbb{R}^3} f(u)v, \quad \forall u, v \in H_\mu.$$

Note porém, que, a rigor, I_μ não é de classe $C^2(H_\mu, \mathbb{R})$, pois M e f são apenas contínuas. Definimos a variedade de Nehari associada a I_μ por

$$\mathcal{N}_\mu = \{u \in H_\mu \setminus \{0\} : I'_\mu(u)u = 0\}.$$

Devido a regularidade do funcional I_μ , não podemos garantir que \mathcal{N}_μ é uma variedade de classe C^1 modelada sobre H_μ .

Denotamos por H_μ^+ o subconjunto de H_μ dado por

$$H_\mu^+ := \{u \in H_\mu : u^+ \neq 0\},$$

e por S_μ^+ o conjunto $S_\mu^+ := S_\mu \cap H_\mu^+$, onde S_μ é a esfera unitária de H_μ .

Lema 1.3.1 *O conjunto H_μ^+ é aberto em H_μ .*

Demonstração: Suponha por contradição que existe $u \in H_\mu^+ \cap \partial H_\mu^+$. Assim, obtemos uma sequência $\{u_n\} \subset H_\mu \setminus H_\mu^+$ tal que $u_n \rightarrow u$ em H_μ . Logo,

$$|\text{supp}(u_n^+)| = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

e

$$u_n^+(x) \rightarrow u^+(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^3. \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2), temos que

$$u^+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^+(x) = 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^3.$$

Mas isso contradiz o fato de que $u \in H_\mu^+$. Portanto H_μ^+ é aberto. ■

Desde que H_μ é um espaço de Hilbert, mostra-se que $\|\cdot\| \in C^{1,1}(H_\mu \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ e tem derivada dada por

$$(\|\cdot\|_\mu)'(u)v = (u, v)_\mu / \|u\|_\mu.$$

Do teorema da função implícita em espaços de Banach, concluímos que S_μ é uma $C^{1,1}$ -variedade modelada sobre H_μ com co-dimensão 1.

Assim, S_μ^+ é uma $C^{1,1}$ -variedade não-completa (como espaço métrico) de H_μ inteiramente contida no aberto H_μ^+ . Consequentemente, para cada $u \in S_\mu^+$, temos a seguinte decomposição

$$H_\mu = T_u S_\mu^+ \oplus \mathbb{R} u,$$

onde $T_u S_\mu^+ = \{v \in H_\mu : (u, v)_\mu = 0\}$.

Finalmente, definimos uma solução fraca de (P_μ) como sendo uma função $u \in H_\mu$ tal que

$$M(\|u\|_\mu^2)(u, v)_\mu = \int_{\mathbb{R}^3} f(u)v, \quad \forall v \in H_\mu.$$

Portanto, pontos críticos de I_μ são soluções fracas de (P_μ) .

1.3.2 Solução ground-state para o problema autônomo

O principal objetivo desta subseção é a demonstração do Teorema 1.3.1 e do Lema 1.3.5. Devido a falta de diferenciabilidade das funções envolvidas em nosso problema, adotaremos uma abordagem inspirada em [72], como ocorre em [74]. Entretanto, diferentemente de [74], em nosso caso, veremos que \mathcal{N}_μ não é homeomorfa a esfera. Tal fato acarreta o surgimento de dificuldades técnicas, ver Lema 1.3.2(A_4) e a demonstração do Lema 1.3.5.

Lema 1.3.2 *Suponha que a função M satisfaz $(M_1) - (M_2)$ e a função f satisfaz $(f_1) - (f_4)$. Assim:*

(A_1) *Para cada $u \in H_\mu^+$, definimos $h_u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ por $h_u(t) = I_\mu(tu)$. Então, existe um único $t_u > 0$ tal que $h'_u(t) > 0$ em $(0, t_u)$ e $h'_u(t) < 0$ em (t_u, ∞) .*

(A₂) Existe $\tau > 0$, independente de u , tal que $t_u \geq \tau$ para todo $u \in S_\mu^+$. Além disso, para cada conjunto compacto $\mathcal{W} \subset S_\mu^+$ existe $C_{\mathcal{W}} > 0$ tal que $t_u \leq C_{\mathcal{W}}$, para todo $u \in \mathcal{W}$.

(A₃) A aplicação $\widehat{m}_\mu : H_\mu^+ \rightarrow \mathcal{N}_\mu$, definida por $\widehat{m}_\mu(u) = t_u u$, é contínua. A aplicação $m_\mu : S_\mu^+ \rightarrow \mathcal{N}_\mu$, definida por $m_\mu = (\widehat{m}_\mu)|_{S_\mu^+}$, é um homeomorfismo entre S_μ^+ e \mathcal{N}_μ . Além disso, a inversa de m_μ é dada por $m_\mu^{-1}(u) = u/\|u\|_\mu$.

(A₄) Se $\text{dist}(u_n, \partial S_\mu^+) \rightarrow 0$, para alguma sequência $\{u_n\} \subset S_\mu^+$, então

$$\|m_\mu(u_n)\|_\mu \rightarrow \infty \text{ e } I_\mu(m_\mu(u_n)) \rightarrow \infty.$$

Demonstração:

(A₁) Devido a (M₂), (f₁) e (f₂) (ver Lema 1.0.1(ii), Observação 1.0.1 e Lema 1.0.5(i)), segue que para cada $u \in H_\mu^+$

$$h_u(t) = I_\mu(tu) \geq \frac{m_0}{2} t^2 \|u\|_\mu^2 - \frac{\xi}{2} t^4 \int_{\mathbb{R}^3} (u^+)^4 - \frac{C_\xi}{q} t^q \int_{\mathbb{R}^3} (u^+)^q.$$

Das imersões contínuas de Sobolev,

$$h_u(t) \geq \frac{m_0}{2} t^2 \|u\|_\mu^2 - \xi C_1 t^4 \|u\|_\mu^4 - C_2 t^q \|u\|_\mu^q.$$

Escolhendo $t > 0$ suficientemente pequeno, obtemos $\alpha > 0$ tal que $h_u(t) \geq \alpha$.

Por outro lado, fixado $u \in H_\mu^+$ segue-se de (M₂) e (f₃) (ver Lemas 1.0.1(ii) e 1.0.5(ii)) que, para cada $t > 0$

$$h_u(t) \leq C_1 \|u\|_\mu^2 t^2 + C_2 \|u\|_\mu^4 t^4 - C_3 \int_{\mathcal{O}} (u^+)^{\theta} t^\theta + C_4 |\mathcal{O}|, \quad (1.3)$$

onde $\mathcal{O} \subset \text{supp}(u^+)$ é um subconjunto mensurável de medida positiva e finita. Uma vez que $\theta \in (4, 6)$, existe $t_* > 0$ suficientemente grande tal que $h_u(t_*) < 0$.

Sendo a aplicação $h_u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, ela admite ao menos um ponto de máximo $t_u > 0$. Devido as hipóteses (M₂) (ver Lema 1.0.1(ii)) e (f₄), segue-se que t_u é o único ponto crítico de h_u e portanto t_u é ponto de máximo global.

Com efeito, suponha por contradição que existem números reais positivos $t_1 > t_2$ tais que $h'_u(t_1) = h'_u(t_2) = 0$. Segue da definição de h_u e das hipóteses mencionadas que

$$0 > \frac{M(\|t_1 u\|_\mu^2)}{\|t_1 u\|_\mu^2} - \frac{M(\|t_2 u\|_\mu^2)}{\|t_2 u\|_\mu^2} = \frac{1}{\|u\|_\mu^4} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{f(t_1 u)}{(t_1 u)^3} - \frac{f(t_2 u)}{(t_2 u)^3} \right] u^4 \geq 0,$$

o que não faz sentido.

Sendo assim, para cada $u \in H_\mu^+$, a aplicação h_u tem um único ponto de máximo global $t_u > 0$, o que demonstra (A_1) . Note que t_u é o único real positivo satisfazendo $t_u u \in \mathcal{N}_\mu$, pois $h'_u(t) = 0$ se, e somente se, $tu \in \mathcal{N}_\mu$.

(A_2) Seja $u \in S_\mu^+$. De (M_2) , (f_1) , (f_2) e das imersões contínuas de Sobolev

$$m_0 t_u \leq M(t_u^2) t_u = \int_{\mathbb{R}^3} f(t_u u) u \leq \xi C_1 t_u^3 + C_\xi C_2 t_u^{q-1}.$$

Assim, existe $\tau > 0$ (independente de u) tal que $t_u \geq \tau$.

Finalmente, se $\mathcal{W} \subset S_\mu^+$ é compacto, suponha por contradição que existe $\{u_n\} \subset \mathcal{W}$ tal que $t_n = t_{u_n} \rightarrow \infty$. Sendo \mathcal{W} compacto, existe $u \in \mathcal{W}$ com $u_n \rightarrow u$ em H_μ . Da desigualdade em (1.3), concluímos que

$$I_\mu(t_n u_n) \rightarrow -\infty. \quad (1.4)$$

Por outro lado, note que se $v \in \mathcal{N}_\mu$, então por (f_3)

$$I_\mu(v) = I_\mu(v) - \frac{1}{\theta} I'_\mu(v) v \geq \frac{1}{2} \widehat{M}(\|v\|_\mu^2) - \frac{1}{\theta} M(\|v\|_\mu^2) \|v\|_\mu^2.$$

Uma vez que $\{t_n u_n\} \subset \mathcal{N}_\mu$, obtemos

$$\frac{1}{t_n^2} I_\mu(t_n u_n) \geq \frac{1}{t_n^2} \left[\frac{1}{2} \widehat{M}(t_n^2) - \frac{1}{\theta} M(t_n^2) t_n^2 \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para n suficientemente grande, segue-se de (1.4) e da hipótese (M_2) (ver Lema 1.0.2(ii) e Observação 1.0.1) que

$$0 \geq \left(\frac{\theta - 2}{2\theta} \right) m_0 > 0,$$

o que é uma contradição. Portanto (A_2) é verdadeira.

(A_3) Vejamos primeiramente que \widehat{m}_μ e m_μ^{-1} estão bem definidas. De fato, para cada $u \in H_\mu^+$ segue, de (A_1) , que existe um único $\widehat{m}_\mu(u) \in \mathcal{N}_\mu$. Por outro lado, se $u \in \mathcal{N}_\mu$ então

$$0 < M(\|u\|_\mu^2) \|u\|_\mu^2 = \int_{\mathbb{R}^3} f(u) u = \int_{\text{supp}(u^+)} f(u) u.$$

Logo, $|\text{supp}(u^+)| > 0$, ou equivalentemente, $u \in H_\mu^+$. Assim, $m_\mu^{-1}(u) = u/\|u\|_\mu \in S_\mu^+$ e m_μ^{-1} está bem definida.

Desde que,

$$m_\mu^{-1}(m_\mu(u)) = m_\mu^{-1}(t_u u) = \frac{t_u u}{t_u \|u\|_\mu} = u, \quad \forall u \in S_\mu^+$$

e

$$m_\mu(m_\mu^{-1}(u)) = m_\mu\left(\frac{u}{\|u\|_\mu}\right) = t_{\left(\frac{u}{\|u\|_\mu}\right)} \frac{u}{\|u\|_\mu} = u, \quad \forall u \in \mathcal{N}_\mu,$$

concluimos que m_μ é bijetiva com inversa m_μ^{-1} .

Finalmente, segue da definição de m_μ^{-1} a sua continuidade. Para mostrar que $\widehat{m}_\mu : H_\mu^+ \rightarrow \mathcal{N}_\mu$ é contínua, sejam $\{u_n\} \subset H_\mu^+$ e $u \in H_\mu^+$ tais que $u_n \rightarrow u$ em H_μ . De (A_2) , existe $t_0 > 0$ tal que $\|u_n\|_\mu t_{u_n} = t_{\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_\mu}\right)} \rightarrow t_0$. Assim, $t_{u_n} \rightarrow t_0/\|u\|_\mu$. Desde que, $t_{u_n} u_n \in \mathcal{N}_\mu$ temos

$$M(t_{u_n}^2 \|u_n\|_\mu^2) t_{u_n} \|u_n\|_\mu^2 = \int_{\mathbb{R}^3} f(t_{u_n} u_n) u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite de $n \rightarrow \infty$, concluimos que

$$M\left(\frac{t_0^2}{\|u\|_\mu^2} \|u\|_\mu^2\right) \frac{t_0}{\|u\|_\mu} \|u\|_\mu^2 = \int_{\mathbb{R}^3} f\left(\frac{t_0}{\|u\|_\mu} u\right) u.$$

Donde $(t_0/\|u\|_\mu)u \in \mathcal{N}_\mu$ e conseqüentemente $t_u = t_0/\|u\|_\mu$, mostrando que $\widehat{m}_\mu(u_n) \rightarrow \widehat{m}_\mu(u)$. Logo, \widehat{m}_μ e m_μ são contínuas.

(A_4) Seja $\{u_n\} \subset S_\mu^+$ uma seqüência tal que $dist(u_n, \partial S_\mu^+) \rightarrow 0$. Desde que, para cada $v \in \partial S_\mu^+$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$u_n^+(x) \leq |u_n(x) - v(x)| \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^3,$$

segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^3} (u_n^+)^s \leq \inf_{v \in \partial S_\mu^+} \int_{\mathbb{R}^3} |u_n - v|^s, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall s \in [2, 6]. \quad (1.5)$$

Das imersões de Sobolev, existe $C(s) > 0$ such that

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (u_n^+)^s &\leq C(s) \inf_{v \in \partial S_\mu^+} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} [|\nabla(u_n - v)|^2 + \mu(u_n - v)^2] \right\}^{s/2} \\ &= C(s) dist(u_n, \partial S_\mu^+)^s, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De (f_1) e (f_2) existem constantes positivas C_1 e C_2 , tais que, para cada $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} F(tu_n) &\leq C_1 t^4 \int_{\mathbb{R}^3} (u_n^+)^4 + C_2 t^q \int_{\mathbb{R}^3} (u_n^+)^q \\ &\leq C_1 C(4) t^4 dist(u_n, \partial S_\mu^+)^4 \\ &\quad + C_2 C(q) t^q dist(u_n, \partial S_\mu^+)^q. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} F(tu_n) \leq 0, \quad \forall t > 0.$$

Da definição de m_μ , temos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I_\mu(m_\mu(u_n)) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} I_\mu(tu_n) \geq \frac{1}{2} \widehat{M}(t^2), \quad \forall t > 0.$$

Segue-se de (M_2) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_\mu(m_\mu(u_n)) = \infty.$$

Desde que $\frac{1}{2} \widehat{M}(t_{u_n}^2) \geq I_\mu(m_\mu(u_n))$, para cada $n \in \mathbb{N}$, concluímos de (M_2) que $\|m_\mu(u_n)\|_\mu \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. O Lema está provado. \blacksquare

Definamos agora as aplicações

$$\widehat{\Psi}_\mu : H_\mu^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } \Psi_\mu : S_\mu^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

por $\widehat{\Psi}_\mu(u) = I_\mu(\widehat{m}_\mu(u))$ e $\Psi_\mu := (\widehat{\Psi}_\mu)|_{S_\mu^+}$.

Do Lema 1.3.2, segue-se que $\widehat{\Psi}_\mu$ e Ψ_μ estão bem definidas e são contínuas.

A proposição que segue nos diz que as aplicações definidas anteriormente são diferenciáveis. Ao menos em nosso conhecimento, esse resultado foi demonstrado primeiramente em [72], como um resultado abstrato para funcionais, apenas C^1 , cuja variedade de Nehari é homeomorfa a toda a esfera. Ainda em [72] é mencionada a validade do mesmo para funcionais que se comportam como I_μ . Sendo assim, para maior clareza dos resultados, faremos a demonstração.

Proposição 1.3.1 *Sob as hipóteses do Lema 1.3.2,*

(a) $\widehat{\Psi}_\mu \in C^1(H_\mu^+, \mathbb{R})$ e

$$\widehat{\Psi}'_\mu(u)v = \frac{\|\widehat{m}_\mu(u)\|_\mu}{\|u\|_\mu} I'_\mu(\widehat{m}_\mu(u))v, \quad \forall u \in H_\mu^+ \text{ e } \forall v \in H_\mu.$$

(b) $\Psi_\mu \in C^1(S_\mu^+, \mathbb{R})$ e

$$\Psi'_\mu(u)v = \|m_\mu(u)\|_\mu I'_\mu(m_\mu(u))v, \quad \forall v \in T_u S_\mu^+.$$

(c) *Se $\{u_n\}$ é uma seqüência $(PS)_d$ para Ψ_μ então $\{m_\mu(u_n)\}$ é uma seqüência $(PS)_d$ para I_μ . Se $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\mu$ é uma seqüência $(PS)_d$ limitada para I_μ então $\{m_\mu^{-1}(u_n)\}$ é uma seqüência $(PS)_d$ para Ψ_μ .*

(d) u é um ponto crítico de Ψ_μ se, e somente se, $m_\mu(u)$ é um ponto crítico não-trivial de I_μ . Além disso, os valores críticos correspondentes coincidem e

$$\inf_{S_\mu^+} \Psi_\mu = \inf_{N_\mu} I_\mu. \quad (1.6)$$

Demonstração:

(a) Sejam $u \in H_\mu^+$ e $v \in H_\mu$. Usando, respectivamente, a definição de $\widehat{\Psi}_\mu$, a definição de t_u e o Teorema do Valor Médio, resulta que

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_\mu(u + sv) - \widehat{\Psi}_\mu(u) &= I_\mu(t_{(u+sv)}(u + sv)) - I_\mu(t_u u) \\ &\leq I_\mu(t_{(u+sv)}(u + sv)) - I_\mu(t_{(u+sv)} u) \\ &= I'_\mu(t_{(u+sv)}(u + \tau sv)) t_{(u+sv)} sv, \end{aligned}$$

onde $|s|$ é suficientemente pequeno e $\tau \in (0, 1)$. Por outro lado,

$$\widehat{\Psi}_\mu(u + sv) - \widehat{\Psi}_\mu(u) \geq I_\mu(t_u(u + sv)) - I_\mu(t_u u) = I'_\mu(t_u(u + \varsigma sv)) t_u sv,$$

onde $\varsigma \in (0, 1)$. Sendo a aplicação $u \mapsto t_u$ contínua, segue das desigualdades anteriores que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\widehat{\Psi}_\mu(u + sv) - \widehat{\Psi}_\mu(u)}{s} = t_u I'_\mu(t_u u) v = \frac{\|\widehat{m}_\mu(u)\|_\mu}{\|u\|_\mu} I'_\mu(\widehat{m}_\mu(u)) v.$$

Sendo $I_\mu \in C^1(H_\mu, \mathbb{R})$ e \widehat{m}_μ contínua, segue-se que a derivada de Gateaux de $\widehat{\Psi}$ é linear e limitada em v e contínua em u . Logo, de [[76], Proposition 1.3], temos $\widehat{\Psi} \in C^1(H_\mu^+, \mathbb{R})$ e

$$\widehat{\Psi}'_\mu(u)v = \frac{\|\widehat{m}_\mu(u)\|_\mu}{\|u\|_\mu} I'_\mu(\widehat{m}_\mu(u))v, \quad \forall u \in H_\mu^+ \text{ e } \forall v \in H_\mu.$$

(b) Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow S_\mu^+$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = u$ e $\gamma'(0) = v$. Então, por definição

$$\Psi'_\mu(u)v = \frac{d}{dt} \widehat{\Psi}_\mu(\gamma(t))|_{t=0}.$$

Da Regra da Cadeia e do ítem (a), obtemos

$$\Psi'_\mu(u)v = \widehat{\Psi}'_\mu(\gamma(0))\gamma'(0) = \|m_\mu(u)\|_\mu I'_\mu(m_\mu(u))v.$$

(c) Uma vez que $H_\mu = T_u S_\mu^+ \oplus \mathbb{R} u$, para cada $u \in S_\mu^+$, concluímos que a projeção linear $P : H_\mu \rightarrow T_u S_\mu^+$ definida por $P(v + tu) = v$ é contínua, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\|v\|_\mu \leq C\|v + tu\|_\mu, \quad \forall u \in S_\mu^+, v \in T_u S_\mu^+ \text{ e } t \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Do ítem (b), temos que

$$\|\Psi'_\mu(u)\|_* = \sup_{\substack{v \in T_u S_\mu^+ \\ \|v\|_\mu=1}} \Psi'_\mu(u)v = \|w\|_\mu \sup_{\substack{v \in T_u S_\mu^+ \\ \|v\|_\mu=1}} I'_\mu(w)v, \quad (1.8)$$

onde $w = m_\mu(u)$. Desde que $u = m_\mu^{-1}(w) = w/\|w\|_\mu$ e $w \in \mathcal{N}_\mu$, temos

$$I'_\mu(w)u = I'_\mu(w) \frac{w}{\|w\|_\mu} = 0. \quad (1.9)$$

De (1.8), resulta que

$$\|\Psi'_\mu(u)\|_* \leq \|w\|_\mu \|I'_\mu(w)\| = \|w\|_\mu \sup_{\substack{v \in T_u S_\mu^+, t \in \mathbb{R} \\ v+tu \neq 0}} \frac{I'_\mu(w)(v + tu)}{\|v + tu\|_\mu}.$$

Assim, de (b), (1.7) e (1.9)

$$\|\Psi'_\mu(u)\|_* \leq C\|w\|_\mu \sup_{v \in T_u S_\mu^+ \setminus \{0\}} \frac{I'_\mu(w)(v)}{\|v\|_\mu} = C\|\Psi'_\mu(u)\|_*.$$

Mostrando que,

$$\|\Psi'_\mu(u)\|_* \leq \|w\| \|I'_\mu(w)\| \leq C\|\Psi'_\mu(u)\|_*, \quad \forall u \in S_\mu^+. \quad (1.10)$$

Desde que $w \in \mathcal{N}_\mu$, temos $\|w\| \geq \tau > 0$. Portanto, a desigualdade em (1.10) juntamente com o fato que $I_\mu(w) = \Psi_\mu(u)$ demonstram o ítem (c).

(d) Segue de (1.10) que $\Psi'_\mu(u) = 0$ se, e somente se, $I'_\mu(w) = 0$. A outra parte segue da definição de Ψ_μ . ■

Um argumento análogo ao da demonstração do Lema 1.3.2(A_1) nos permite concluir que I_μ tem a geometria do passo da montanha. Segue de uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição Palais-Smale, a qual pode ser encontrada em [[76], Theorem 1.15], que existe $\{u_n\} \subset H_\mu$ satisfazendo

$$I_\mu(u_n) \rightarrow c_\mu \text{ and } I'_\mu(u_n) \rightarrow 0, \quad (1.11)$$

onde c_μ é o nível minimax associado a I_μ , definido por

$$c_\mu = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I_\mu(\gamma(t)),$$

com $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_\mu) : \gamma(0) = 0 \text{ e } I_\mu(\gamma(1)) < 0\}$.

Lema 1.3.3

$$c_\mu = \inf_{u \in \mathcal{N}_\mu} I_\mu(u) = \inf_{u \in H_\mu^+} \max_{t>0} I_\mu(tu) = \inf_{u \in S_\mu^+} \max_{t>0} I_\mu(tu).$$

Demonstração: Desde que $\hat{m}_\mu(u) = \hat{m}_\mu(u/\|u\|_\mu)$, para todo $u \in H_\mu^+$, temos

$$\inf_{u \in H_\mu^+} \max_{t>0} I_\mu(tu) = \inf_{u \in S_\mu^+} \max_{t>0} I_\mu(tu). \quad (1.12)$$

Da definição de Ψ_μ , obtemos

$$\inf_{u \in S_\mu^+} \max_{t>0} I_\mu(tu) = \inf_{u \in S_\mu^+} \Psi_\mu(u). \quad (1.13)$$

Comparando (1.12) e (1.13) e usando (1.6), concluímos que

$$\inf_{u \in \mathcal{N}_\mu} I_\mu(u) = \inf_{u \in H_\mu^+} \max_{t>0} I_\mu(tu) = \inf_{u \in S_\mu^+} \max_{t>0} I_\mu(tu).$$

Por outro lado, para cada $u \in H_\mu^+$, segue-se da desigualdade em (1.3) que existe $t_* > 0$ tal que fixando $e = t_*u \in H_\mu^+$, temos $I_\mu(e) < 0$. Assim, podemos definir

$$\bar{\gamma}(t) = te; \quad \forall t \in [0, 1].$$

Claramente $\bar{\gamma} \in \Gamma$ e

$$\max_{t \in [0,1]} I_\mu(\bar{\gamma}(t)) = \max_{t>0} I_\mu(tu).$$

Das igualdades já provadas, resulta que

$$\inf_{u \in \mathcal{N}_\mu} I_\mu(u) \leq c_\mu. \quad (1.14)$$

Suponha por contradição que a desigualdade em (1.14) seja estrita. Da definição de ínfimo, existe $\bar{u} \in \mathcal{N}_\mu$, tal que

$$I_\mu(\bar{u}) < c_\mu.$$

Novamente, escolhendo $e = t_*\bar{u}$, onde $t_* > 1$ e $I_\mu(e) < 0$, e definindo $\tilde{\gamma}(t) = te$, $\forall t \in [0, 1]$, concluímos do Lema 1.3.2, que

$$\max_{t \in [0, 1]} I_\mu(\tilde{\gamma}(t)) = I_\mu(\tilde{\gamma}(1/t_*)) < c_\mu. \quad (1.15)$$

Ora, sendo $\tilde{\gamma} \in \Gamma$, a desigualdade em (1.15) contradiz a definição de c_μ . ■

Lema 1.3.4 *Seja $\{u_n\} \subset H_\mu$ uma sequência $(PS)_c$ para I_μ com $u_n \rightharpoonup 0$. Então, apenas uma das alternativas abaixo ocorre:*

(a) $u_n \rightarrow 0$ em H_μ ;

(b) existem $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^3$ e constantes $R, \beta > 0$ tais que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} u_n^2 \geq \beta > 0.$$

Demonstração: Suponha que (b) não ocorre. Assim, para cada $R > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_R(y)} u_n^2 = 0.$$

Sendo $\{u_n\}$ limitada em H_μ , concluímos de [[76], Lemma 1.21], que

$$u_n \rightarrow 0 \text{ in } L^s(\mathbb{R}^3), 2 < s < 6.$$

De (M_1) , (M_2) , (f_1) e (f_2) ,

$$0 \leq m_0 \|u_n\|_\mu = \int_{\mathbb{R}^3} f(u_n)u_n + o_n(1) = o_n(1).$$

Mostrando que (a) ocorre. ■

Podemos admitir que a sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^3$ obtida no Lema 1.3.4 verifica $|y_n| \rightarrow \infty$. Com efeito, se a mesma fosse limitada, usaríamos a convergência fraca de $\{u_n\}$ e a imersão compacta de H_μ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ para concluir que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} u_n^2 = 0,$$

para todo $R > 0$, contradizendo o lema anterior.

Observação 1.3.1 *O lema anterior permite-nos assumir que o limite fraco u de uma sequência $(PS)_c$, com $c \neq 0$, é não-trivial. Com efeito, se $u = 0$ é o limite fraco de uma sequência $\{u_n\}$, Palais-Smale no nível c para o funcional I_μ , teremos $u_n \rightarrow 0$ e, uma vez que $c \neq 0$, não ocorre $u_n \rightarrow 0$ em H_μ . Concluímos do Lema 1.3.4 que existem $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^3$ e $R, \beta > 0$ tais que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} u_n^2 \geq \beta > 0. \quad (1.16)$$

Definindo $v_n(x) = u_n(x + y_n)$, segue-se da invariância por translação de \mathbb{R}^3 que $\{v_n\}$ é limitada em H_μ . De (1.16), existe $v \neq 0$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ em H_μ . Novamente devido a invariância por translação de \mathbb{R}^3 , temos que $\{v_n\}$ também é uma sequência $(PS)_c$ para I_μ , com limite fraco não-trivial.

A demonstração do próximo resultado é análoga aquela que aparece no Teorema 2.15 de [10], entretanto, como não impusemos sobre M as hipóteses (M_2) e (M_4) em [10] e precisamos mostrar que $u \in H_\mu^+$, aparecem algumas sutis diferenças na prova. Por completeza, faremos a demonstração.

Proposição 1.3.2 *Seja $\{u_n\} \subset H_\mu$ uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para I_μ . Então existe $u \in H_\mu^+$ tal que, passando a uma subsequência, temos $u_n \rightharpoonup u$ em H_μ , a menos de translação. Além disso, u é uma solução ground-state para o problema (P_μ) .*

Demonstração: Sendo $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para I_μ , existe $C > 0$ tal que

$$C + \|u_n\|_\mu \geq I_\mu(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_\mu(u_n)u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De (M_2) e (f_3) , obtemos

$$C + \|u_n\|_\mu \geq \left(\frac{\theta - 2}{2\theta} \right) m_0 \|u_n\|_\mu^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto $\{u_n\}$ é limitada em H_μ . Assim, passando a uma subsequência, obtemos

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_\mu, \quad (1.17)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^3), 1 \leq s < 6 \quad (1.18)$$

e

$$\|u_n\|_\mu \rightarrow t_0. \quad (1.19)$$

De (1.17) concluimos que

$$(u_n, v)_\mu \rightarrow (u, v)_\mu, \quad \forall v \in H_\mu. \quad (1.20)$$

Por outro lado, devido a densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ em H_μ e da convergência em (1.18), resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(u_n)v \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} f(u)v, \quad \forall v \in H_\mu. \quad (1.21)$$

Agora, da convergência em (1.17) e de (1.19), vale

$$\|u\|_\mu^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\mu^2 = t_0^2,$$

o que juntamente com (M_1) nos dá $M(\|u\|_\mu^2) \leq M(t_0^2)$.

Para mostrar que a igualdade ocorre, adaptaremos as idéias de Alves e Figueiredo em [10]. De fato, suponha por contradição que

$$M(\|u\|_\mu^2) < M(t_0^2). \quad (1.22)$$

Da Observação 1.3.1 podemos considerar $u \neq 0$. Logo, da desigualdade em (1.22), obtemos

$$M(\|u\|_\mu^2)\|u\|_\mu^2 < M(t_0^2)\|u\|_\mu^2. \quad (1.23)$$

De (1.19), (1.20) e (1.21) segue-se que

$$M(t_0^2)\|u\|_\mu^2 = \int_{\mathbb{R}^3} f(u)u = \int_{\text{supp}(u^+)} f(u)u. \quad (1.24)$$

Assim, de (1.23) e (1.24) temos $I'_\mu(u)u < 0$. De (1.24) e $u \neq 0$, obtemos $u \in H_\mu^+$, e portanto, do Lema 1.3.2(A_1), existe um único $t_u \in (0, 1)$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_\mu$.

Sendo assim, do Lema 1.3.3

$$\begin{aligned} c_\mu &\leq I_\mu(t_u u) - \frac{1}{4} I'_\mu(t_u u)(t_u u) \\ &= \frac{1}{2} \widehat{M}(\|t_u u\|_\mu^2) - \frac{1}{4} M(\|t_u u\|_\mu^2) \|t_u u\|_\mu^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{4} f(t_u u) t_u u - F(t_u u) \right]. \end{aligned}$$

Devido a (M_2) e (f_4) ,

$$c_\mu < \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|_\mu^2) - \frac{1}{4} M(\|u\|_\mu^2) \|u\|_\mu^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{4} f(u)u - F(u) \right].$$

De (M_2) , (f_4) e do Lema de Fatou

$$c_\mu < \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[I_\mu(u_n) - \frac{1}{4} I'_\mu(u_n)(u_n) \right] = c_\mu,$$

o que é uma contradição. Portanto $M(t_0^2) = M(\|u\|_\mu^2)$. Desde que essa última igualdade contradiz (1.22), concluímos que u é solução fraca de (P_μ) . Com argumentos análogos, vemos que u é uma solução ground-state de (P_μ) . ■

No principal resultado desta seção obteremos uma solução ground-state positiva para o problema autônomo (P_μ) .

Teorema 1.3.1 *Para cada $\mu > 0$ dado, o problema (P_μ) admite uma solução ground-state positiva $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$, com $\alpha \in (0, 1)$.*

Demonstração: A existência de uma solução ground-state $u \in H_\mu^+$, segue de (1.11) e da Proposição 1.3.2. Usando u^- como função teste, concluímos que $u \geq 0$. Desde que $M(\|u\|_\mu^2)$ é um número real fixado, para concluir a regularidade de u , podemos argumentar exatamente como no Teorema C.1 de [1]. A positividade de u segue da desigualdade de Harnack (Theorem 8.20), em [48]. ■

O próximo lema, que será extremamente útil na demonstração da Proposição 1.5.1, nos dá um resultado de compacidade para sequências minimizantes sobre a variedade de Nehari associada ao funcional I_μ . Além disso, em sua demonstração, ficará evidente o papel do item (A_4) do Lema 1.3.2.

Lema 1.3.5 *Seja $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\mu$ tal que $I_\mu(u_n) \rightarrow c_\mu$. Então, $\{u_n\}$ tem uma subsequência convergente em $H^1(\mathbb{R}^3)$, a menos de translação.*

Demonstração: Desde que $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\mu$, segue-se do Lema 1.3.2(A_3), da Proposição 1.3.1 e do Lema 1.3.3, que

$$v_n = m_\mu^{-1}(u_n) = \frac{u_n}{\|u_n\|_\mu} \in S_\mu^+, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.25)$$

e

$$\Psi_\mu(v_n) = I_\mu(u_n) \rightarrow c_\mu = \inf_{S_\mu^+} \Psi_\mu. \quad (1.26)$$

Embora S_μ^+ seja não-completa, devido ao Lema 1.3.2(A_4), ainda podemos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland em [[40], Theorem 1.1] ao funcional $\xi_\mu : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definido por

$$\xi_\mu(u) = \begin{cases} \Psi_\mu(u), & \text{se } u \in S_\mu^+ \\ \infty, & \text{se } u \in \partial S_\mu^+, \end{cases}$$

onde $V = \overline{S_\mu^+}$ é um espaço métrico completo com métrica

$$d(u, v) = \|u - v\|_\mu.$$

De fato, do Lema 1.3.2(A_4), $\xi_\mu \in C(V, \mathbb{R} \cup \{\infty\})$ e, da Proposição 1.3.1(d), ξ_μ é limitado inferiormente.

Sendo assim, novamente do Lema 1.3.2(A_4) e do Princípio variacional de Ekeland, para cada $\varepsilon, \lambda > 0$ fixados e $c_\mu \leq \psi_\mu(u) \leq c_\mu + \varepsilon$, existe $v \in S_\mu^+$ tal que

$$\begin{aligned} c_\mu &\leq \psi_\mu(v) \leq \psi_\mu(u), \\ \|u - v\|_\mu &\leq \lambda \end{aligned}$$

e

$$\xi_\mu(w) > \psi_\mu(v) - (\varepsilon/\lambda)\|v - w\|_\mu, \quad \forall w \neq v.$$

Passando a uma subsequência, se necessário, segue de (1.26) que podemos escolher $u = v_n$, $\varepsilon = 1/n^2$ e $\lambda = 1/n$ e obter $\widehat{v}_n \in S_\mu^+$, satisfazendo

$$\psi_\mu(\widehat{v}_n) \rightarrow c_\mu, \quad (1.27)$$

$$\|v_n - \widehat{v}_n\|_\mu \rightarrow 0 \quad (1.28)$$

e

$$\xi_\mu(w) > \psi_\mu(\widehat{v}_n) - (1/n)\|\widehat{v}_n - w\|_\mu, \quad \forall w \neq \widehat{v}_n. \quad (1.29)$$

Seja $\gamma_n : (-\delta_n, \delta_n) \rightarrow S_\mu^+$ uma curva diferenciável, com $\delta_n > 0$ suficientemente pequeno, tal que $\gamma_n(0) = \widehat{v}_n$ e $\gamma_n'(0) = z \in T_{\widehat{v}_n}(S_\mu^+)$. Escolhendo $w = \gamma_n(t)$, segue de (1.29) que

$$-[\psi_\mu(\gamma_n(t)) - \psi_\mu(\gamma_n(0))] < (1/n)\|\gamma_n(t) - \gamma_n(0)\|_\mu. \quad (1.30)$$

Do Teorema do Valor Médio, existe $0 < c < t$ tal que

$$\|\gamma_n(t) - \gamma_n(0)\|_\mu = \frac{(\gamma_n(c) - \gamma_n(0), \gamma'_n(c))_\mu}{\|\gamma_n(c) - \gamma_n(0)\|_\mu} t \leq \|\gamma'_n(c)\|_\mu t, \quad (1.31)$$

onde usamos Cauchy-Schwarz para obter última desigualdade.

Assim, multiplicando ambos os membros de (1.30) por $1/t$, passando ao limite de $t \rightarrow 0$ e usando (1.31), obtemos

$$-\psi'_\mu(\widehat{v}_n)z \leq \frac{1}{n}\|z\|_\mu,$$

onde $z \in T_{\widehat{v}_n}(S_\mu^+)$ é arbitrário. Por linearidade, temos que

$$|\psi'_\mu(\widehat{v}_n)z| \leq \frac{1}{n}\|z\|_\mu.$$

Logo,

$$\|\psi'_\mu(\widehat{v}_n)\|_* \rightarrow 0, \quad (1.32)$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Segue de (1.27) e (1.32) que $\{\widehat{v}_n\}$ é uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para ψ_μ . Da Proposição 1.3.1(c), concluímos que $\{\widehat{u}_n\} := \{m_\mu(\widehat{v}_n)\}$ é uma sequência $(PS)_{c_\mu}$ para I_μ . Da Proposição 1.3.2, existe $\widehat{u} \geq 0$, solução ground-state de (P_μ) , tal que

$$\widehat{u}_n \rightharpoonup \widehat{u} \text{ em } H_\mu,$$

a menos de subsequência e translação. Para mostrar que

$$\widehat{u}_n \rightarrow \widehat{u} \text{ em } H_\mu,$$

a menos de subsequência, é suficiente provar que

$$\|u_n\|_\mu \rightarrow \|u\|_\mu \text{ em } \mathbb{R}.$$

Uma vez que, da convergência fraca, existe $t_0 \geq 0$ tal que $\|u_n\|_\mu \rightarrow t_0$, a menos de subsequência, e $\|u\|_\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\mu = t_0$. Suponhamos por contradição que $\|u\|_\mu < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\mu = t_0$. Neste caso, teremos de (M_2) , (f_4) e do Lema

de Fatou que

$$\begin{aligned}
c_\mu &= I_\mu(u) - \frac{1}{4}I'_\mu(u)u \\
&= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|_\mu^2) - \frac{1}{4}M(\|u\|_\mu^2)\|u\|_\mu^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{4}f(u)u - F(u) \right] \\
&< \frac{1}{2}\widehat{M}(t_0^2) - \frac{1}{4}M(t_0^2)t_0^2 + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{4}f(u)u - F(u) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|_\mu^2) - \frac{1}{4}M(\|u_n\|_\mu^2)\|u_n\|_\mu^2 \right] + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{4}f(u_n)u_n - F(u_n) \right] \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} I_\mu(u_n) - \frac{1}{4}I'_\mu(u_n)u_n = c_\mu.
\end{aligned}$$

Mas isso é uma contradição. Logo, $t_0 = \|u\|_\mu$ e a prova está completa. ■

Observação 1.3.2 *Para encerrar esta seção, pontuamos que todos os resultados até aqui demonstrados ainda poderiam ser obtidos se substituíssemos a hipótese (M_2) por duas hipóteses mais fracas (ver Lema 1.0.1 e Observação 1.0.1), a saber,*

(M'_2) *Existe $m_0 > 0$ tal que*

$$M(t) \geq m_0, \quad \forall t \geq 0.$$

(M''_2) *A aplicação*

$$t \mapsto \frac{M(t)}{t}$$

é decrescente.

O motivo pelo qual fomos mais exigentes e impusemos a hipótese (M_2) ficará evidente na demonstração do Lema 1.4.2.

1.4 Existência de solução para o problema auxiliar

1.4.1 Resultados preliminares

Nesta subseção obteremos alguns resultados preliminares os quais servem de suporte para a próxima seção. Além disso, também fixaremos algumas notações.

Obteremos solução de $(P_{\varepsilon,A})$ como ponto crítico do funcional energia

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \widehat{M} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u^2 \right) - \int_{\mathbb{R}^3} G(\varepsilon x, u),$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds$ e $G(t) = \int_0^t g(\varepsilon x, s) ds$, o qual está definido sobre o espaço de Hilbert H_ε , dado por

$$H_\varepsilon = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u^2 < \infty \right\},$$

munido do produto interno

$$(u, v)_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) uv,$$

e da norma proveniente

$$\|u\|_\varepsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x) u^2.$$

Novamente, sendo M e f apenas contínuas, J_ε é de classe $C^1(H_\varepsilon, \mathbb{R})$, mas não é de classe $C^2(H_\varepsilon, \mathbb{R})$ e

$$J'_\varepsilon(u)v = M(\|u\|_\varepsilon^2)(u, v)_\varepsilon - \int_{\mathbb{R}^3} g(\varepsilon x, u)v, \quad \forall u, v \in H_\varepsilon.$$

Denotamos a variedade de Nehari associada a J_ε por

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \{u \in H_\varepsilon \setminus \{0\} : J'_\varepsilon(u)u = 0\}.$$

Analogamente ao caso autônomo, não podemos garantir que o conjunto \mathcal{M}_ε é uma variedade diferenciável.

Também definimos o conjunto Ω_ε por

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon x \in \Omega\} = (1/\varepsilon)\Omega.$$

Denotamos por H_ε^+ o subconjunto de H_ε dado por

$$H_\varepsilon^+ = \{u \in H_\varepsilon : |\text{supp}(u^+) \cap \Omega_\varepsilon| > 0\},$$

e $S_\varepsilon^+ = S_\varepsilon \cap H_\varepsilon^+$, onde S_ε é a esfera unitária de H_ε .

Lema 1.4.1 H_ε^+ é aberto em H_ε .

Demonstração: Suponha por contradição que existem uma sequência $\{u_n\} \subset H_\varepsilon \setminus H_\varepsilon^+$ e $u \in H_\varepsilon^+$ tal que $u_n \rightarrow u$ em H_ε . Assim $|\text{supp}(u_n^+) \cap \Omega_\varepsilon| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $u_n^+(x) \rightarrow u^+(x)$ q.t.p. em $x \in \Omega_\varepsilon$. Assim,

$$u^+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^+(x) = 0, \text{ q.t.p. em } x \in \Omega_\varepsilon.$$

Mas, isso contradiz o fato de que $u \in H_\varepsilon^+$. Portanto H_ε^+ é aberto. \blacksquare

Do mesmo modo que no caso autônomo, temos que S_ε^+ é uma $C^{1,1}$ -subvariedade de H_ε^+ e denotamos por $T_u(S_\varepsilon^+)$ o espaço tangente a S_ε^+ em $u \in S_\varepsilon^+$.

Finalmente, uma solução fraca de $(P_{\varepsilon,A})$ é uma função $u \in H_\varepsilon$ tal que

$$M(\|u\|_\varepsilon^2)(u, v)_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} g(\varepsilon x, u)v, \quad \forall v \in H_\varepsilon.$$

Portanto, pontos críticos de J_ε são soluções fracas de $(P_{\varepsilon,A})$.

O próximo lema tem um papel análogo ao do Lema 1.3.2 no caso autônomo, a saber, contornar a ausência de uma estrutura diferenciável na variedade de Nehari associada a J_ε . Entretanto, como trabalhamos com um funcional penalizado precisamos introduzir algumas modificações na prova, em particular, ficará clara a necessidade da hipótese (M_2) em nossos argumentos.

Lema 1.4.2 *Suponha que a função M satisfaz (M_1) – (M_2) , o potencial V satisfaz (V_1) e a função f satisfaz (f_1) – (f_4) . Assim:*

(A₁) *Para cada $u \in H_\varepsilon^+$, definimos $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ por $h_u(t) = J_\varepsilon(tu)$. Então, existe um único $t_u > 0$ tal que $h'_u(t) > 0$ em $(0, t_u)$ e $h'_u(t) < 0$ em (t_u, ∞) .*

(A₂) *Existe $\tau > 0$, independente de u , tal que $t_u \geq \tau$ para todo $u \in S_\varepsilon^+$. Além disso, para cada conjunto compacto $\mathcal{W} \subset S_\varepsilon^+$ existe $C_{\mathcal{W}} > 0$ tal que $t_u \leq C_{\mathcal{W}}$, para todo $u \in \mathcal{W}$.*

(A₃) *A aplicação $\widehat{m}_\varepsilon : H_\varepsilon^+ \rightarrow \mathcal{M}_\varepsilon$ definida por $\widehat{m}_\varepsilon(u) = t_u u$ é contínua. A aplicação $m_\varepsilon : S_\varepsilon^+ \rightarrow \mathcal{M}_\varepsilon$ definida por $m_\varepsilon = (\widehat{m}_\varepsilon)|_{S_\varepsilon^+}$ é um homeomorfismo entre S_ε^+ e \mathcal{M}_ε , e a inversa de m_ε é dada por $m_\varepsilon^{-1}(u) = u/\|u\|_\varepsilon$.*

(A₄) Se $\text{dist}(u_n, \partial S_\varepsilon^+) \rightarrow 0$, para alguma sequência $\{u_n\} \subset S_\varepsilon^+$, então

$$\|m_\varepsilon(u_n)\|_\varepsilon \rightarrow \infty \text{ e } J_\varepsilon(m_\varepsilon(u_n)) \rightarrow \infty.$$

Demonstração:

(A₁) Para cada $u \in H_\varepsilon^+$, definimos $h_u(t) = J_\varepsilon(tu)$. Argumentando como no Lema 1.3.2, com Ω_ε no lugar de \mathcal{O} , concluímos que existe $t_u > 0$ satisfazendo $h'_u(t_u) = 0$, e portanto, $t_u u \in \mathcal{M}_\varepsilon$. Vejamos que t_u é o único número positivo tal que $h'_u(t_u) = 0$. Com efeito, suponha por contradição que existem $t_1 > t_2 > 0$ com $h'_u(t_1) = h'_u(t_2) = 0$. Então, para $i = 1, 2$, temos

$$t_i M(\|t_i u\|_\varepsilon^2) \|u\|_\varepsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^3} g(\varepsilon x, t_i u) u,$$

assim

$$\frac{M(\|t_i u\|_\varepsilon^2)}{\|t_i u\|_\varepsilon^2} = \frac{1}{\|u\|_\varepsilon^4} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{g(\varepsilon x, t_i u)}{(t_i u)^3} \right] u^4.$$

Daí,

$$\frac{M(\|t_1 u\|_\varepsilon^2)}{\|t_1 u\|_\varepsilon^2} - \frac{M(\|t_2 u\|_\varepsilon^2)}{\|t_2 u\|_\varepsilon^2} = \frac{1}{\|u\|_\varepsilon^4} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{g(\varepsilon x, t_1 u)}{(t_1 u)^3} - \frac{g(\varepsilon x, t_2 u)}{(t_2 u)^3} \right] u^4.$$

Segue-se de (M₂) (ver Lema 1.0.1(i)) e (g₄) que

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{\|u\|_\varepsilon^2} \left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2} \right) &\geq \frac{1}{\|u\|_\varepsilon^4} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \{t_2 u \leq a < t_1 u\}} \left[\frac{g(\varepsilon x, t_1 u)}{(t_1 u)^3} - \frac{g(\varepsilon x, t_2 u)}{(t_2 u)^3} \right] u^4 \\ &+ \frac{1}{\|u\|_\varepsilon^4} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \{a < t_2 u\}} \left[\frac{g(\varepsilon x, t_1 u)}{(t_1 u)^3} - \frac{g(\varepsilon x, t_2 u)}{(t_2 u)^3} \right] u^4. \end{aligned}$$

Usando a definição de g obtemos

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{\|u\|_\varepsilon^2} \left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2} \right) &\geq \frac{1}{\|u\|_\varepsilon^4} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \{t_2 u \leq a < t_1 u\}} \left[\frac{V_0}{k} \frac{1}{(t_1 u)^2} - \frac{f(t_2 u)}{(t_2 u)^3} \right] u^4 \\ &+ \frac{1}{\|u\|_\varepsilon^4} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2} \right) \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \{a < t_2 u\}} V_0 u^2. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros por $\|u\|_\varepsilon^4 / \left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2} \right)$ e usando a hipótese $t_1 > t_2$, resulta que

$$\begin{aligned} m_0 \|u\|_\varepsilon^2 &\leq \frac{t_1^2 t_2^2}{t_2^2 - t_1^2} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \{t_2 u \leq a < t_1 u\}} \left[\frac{V_0}{k} \frac{1}{(t_1 u)^2} - \frac{f(t_2 u)}{(t_2 u)^3} \right] u^4 \\ &+ \frac{1}{k} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \{a < t_2 u\}} V_0 u^2. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} m_0 \|u\|_\varepsilon^2 &\leq - \left(\frac{t_2^2}{t_1^2 - t_2^2} \right) \frac{1}{k} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \{t_2 u \leq a < t_1 u\}} V_0 u^2 \\ &\quad + \left(\frac{t_1^2}{t_1^2 - t_2^2} \right) \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \{t_2 u \leq a < t_1 u\}} \frac{f(t_2 u)}{t_2 u} u^2 + \frac{1}{k} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \{a < t_2 u\}} V_0 u^2. \end{aligned}$$

De (f_4) , temos que $f(t)/t \leq V_0/k$ quando $t \leq a$. Logo,

$$\begin{aligned} m_0 \|u\|_\varepsilon^2 &\leq - \left(\frac{t_2^2}{t_1^2 - t_2^2} \right) \frac{1}{k} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \{t_2 u \leq a < t_1 u\}} V_0 u^2 \\ &\quad + \left(\frac{t_1^2}{t_1^2 - t_2^2} \right) \frac{1}{k} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \{t_2 u \leq a < t_1 u\}} V_0 u^2 + \frac{1}{k} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \{a < t_2 u\}} V_0 u^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$m_0 \|u\|_\varepsilon^2 \leq \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon} V_0 u^2 \leq \frac{1}{k} \|u\|_\varepsilon^2.$$

Sendo $u \neq 0$, temos que $m_0 \leq 1/k < m_0$, o que é uma contradição. Logo, (A_1) está provada.

(A_2) A prova da primeira parte se faz exatamente como no Lema 1.3.2. Agora, se $\mathcal{W} \subset S_\varepsilon^+$ é compacto, suponha por contradição que existe $\{u_n\} \subset \mathcal{W}$ tal que $t_n = t_{u_n} \rightarrow \infty$. Sendo \mathcal{W} compacto, existe $u \in \mathcal{W}$ com $u_n \rightarrow u$ em H_ε . Argumentando como na prova do Lema 1.3.2 obtemos

$$J_\varepsilon(t_n u_n) \rightarrow -\infty. \quad (1.33)$$

Por outro lado, note que se $v \in \mathcal{M}_\varepsilon$, então de $(g_3)(i)$

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(v) &= J_\varepsilon(v) - \frac{1}{\theta} J'_\varepsilon(v)v \\ &\geq \frac{1}{2} \widehat{M}(\|v\|_\varepsilon^2) - \frac{1}{\theta} M(\|v\|_\varepsilon^2) \|v\|_\varepsilon^2 + \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon} [g(\varepsilon x, v)v - \theta G(\varepsilon x, v)]. \end{aligned}$$

De $(g_3)(ii)$, temos

$$J_\varepsilon(v) \geq \frac{1}{2} \widehat{M}(\|v\|_\varepsilon^2) - \frac{1}{\theta} M(\|v\|_\varepsilon^2) \|v\|_\varepsilon^2 - \left(\frac{\theta - 2}{2\theta} \right) \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon} V(\varepsilon x) v^2.$$

Assim,

$$J_\varepsilon(v) \geq \frac{1}{2} \widehat{M}(\|v\|_\varepsilon^2) - \frac{1}{\theta} M(\|v\|_\varepsilon^2) \|v\|_\varepsilon^2 - \left(\frac{\theta - 2}{2\theta} \right) \frac{1}{k} \|v\|_\varepsilon^2.$$

De (M_2) e do Lema 1.0.2(ii), temos

$$\widehat{M}(t) \geq \frac{[M(t) + m_0]}{2}t, \quad \forall t \geq 0.$$

Então,

$$J_\varepsilon(v) \geq \left(\frac{\theta - 4}{4\theta}\right) M(\|v\|_\varepsilon^2) \|v\|_\varepsilon^2 + \frac{m_0}{4} \|v\|_\varepsilon^2 - \left(\frac{\theta - 2}{2\theta}\right) \frac{1}{k} \|v\|_\varepsilon^2.$$

De (M_1) e (M_2) (ver Observação 1.0.1), concluimos que

$$J_\varepsilon(v) \geq \left(\frac{\theta - 2}{2\theta}\right) \left(m_0 - \frac{1}{k}\right) \|v\|_\varepsilon^2. \quad (1.34)$$

Desde que $\{t_n u_n\} \subset \mathcal{M}_\varepsilon$, a desigualdade anterior contradiz (1.33). Portanto (A_2) é verdadeiro.

(A_3) Mostraremos que \widehat{m}_ε e m_ε^{-1} estão bem definidas. Sabemos que para cada $u \in H_\varepsilon^+$ temos $\widehat{m}_\varepsilon(u) \in \mathcal{M}_\varepsilon$. Por outro lado, se $u \in \mathcal{M}_\varepsilon$ então

$$0 < M(\|u\|_\varepsilon^2) \|u\|_\varepsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^3} g(\varepsilon x, u) u.$$

Suponhamos por contradição que $|\text{supp}(u^+) \cap \Omega_\varepsilon| = 0$. Então,

$$u(x) \leq 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega_\varepsilon.$$

Daí,

$$0 < m_0 \|u\|_\varepsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon} \widetilde{f}(u) u \leq \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon} V_0 u^2 \leq \frac{1}{k} \|u\|_\varepsilon^2.$$

Donde,

$$0 < \left(m_0 - \frac{1}{k}\right) \|u\|_\varepsilon^2 \leq 0,$$

o que não faz sentido. Logo, $|\text{supp}(u^+) \cap \Omega_\varepsilon| > 0$, ou equivalentemente, $u \in H_\varepsilon^+$.

Assim, $m_\varepsilon^{-1}(u) = u/\|u\|_\varepsilon \in S_\varepsilon^+$ e m_ε^{-1} está bem definida. O restante da demonstração segue os mesmos argumentos da demonstração do Lema 1.3.2.

(A_4) Finalmente, seja $\{u_n\} \subset S_\varepsilon^+$ tal que $\text{dist}(u_n, \partial S_\varepsilon^+) \rightarrow 0$. Desde que, para cada $v \in \partial S_\varepsilon^+$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$u_n^+(x) \leq |u_n(x) - v(x)| \quad \text{q.t.p. em } \Omega_\varepsilon,$$

segue-se que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u_n^+)^s \leq \inf_{v \in \partial S_\varepsilon^+} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_n - v|^s, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall s \in [2, 6]. \quad (1.35)$$

Assim, de (V_1) , (V_2) e imersões de Sobolev, existe $C(s) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} (u_n^+)^s &\leq C(s) \inf_{v \in \partial S_\varepsilon^+} \left\{ \int_{\Omega_\varepsilon} [|\nabla(u_n - v)|^2 + V(\varepsilon x)(u_n - v)^2] \right\}^{s/2} \\ &\leq C(s) \text{dist}(u_n, \partial S_\varepsilon^+)^s, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Da definição de g , (f_1) e (f_2) , existem constantes positivas C_1 e C_2 , tais que, para cada $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} G(\varepsilon x, tu_n) &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} F(tu_n) + \frac{1}{k} t^2 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon} V(\varepsilon x) u_n^2 \\ &\leq C_1 t^4 \int_{\Omega_\varepsilon} (u_n^+)^4 + C_2 t^q \int_{\Omega_\varepsilon} (u_n^+)^q + \frac{1}{k} t^2 \|u_n\|_\varepsilon^2 \\ &\leq C_1 C(4) t^4 \text{dist}(u_n, \partial S_\varepsilon^+)^4 \\ &\quad + C_2 C(q) t^q \text{dist}(u_n, \partial S_\varepsilon^+)^q + \frac{1}{k} t^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} G(\varepsilon x, tu_n) \leq \frac{1}{k} t^2, \quad \forall t > 0.$$

Da definição de m_ε , obtemos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} J_\varepsilon(m_\varepsilon(u_n)) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_\varepsilon(tu_n) \geq \frac{1}{2} \widehat{M}(t^2) - \frac{1}{k} t^2, \quad \forall t > 0.$$

Segue-se de (M_1) , (M_2) e da particular escolha de k , que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\varepsilon(m_\varepsilon(u_n)) = \infty.$$

Desde que $\frac{1}{2} \widehat{M}(t_{u_n}^2) \geq J_\varepsilon(m_\varepsilon(u_n))$, para cada $n \in \mathbb{N}$, concluimos de (M_2) que $\|m_\varepsilon(u_n)\|_\varepsilon \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. A prova está completa. ■

Definamos agora as aplicações

$$\widehat{\Psi}_\varepsilon : H_\varepsilon^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } \Psi_\varepsilon : S_\varepsilon^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

por $\widehat{\Psi}_\varepsilon(u) = J_\varepsilon(\widehat{m}_\varepsilon(u))$ e $\Psi_\varepsilon := (\widehat{\Psi}_\varepsilon)|_{S_\varepsilon^+}$.

Argumentando, respectivamente, como na demonstração da Proposição 1.3.1 e do Lema 1.3.3 da seção anterior, podemos demonstrar os próximos dois resultados.

Proposição 1.4.1 *Sob as hipóteses do Lema 1.4.2,*

(a) $\widehat{\Psi}_\varepsilon \in C^1(H_\varepsilon^+, \mathbb{R})$ e

$$\widehat{\Psi}'_\varepsilon(u)v = \frac{\|\widehat{m}_\varepsilon(u)\|_\varepsilon}{\|u\|_\varepsilon} J'_\varepsilon(\widehat{m}_\varepsilon(u))v, \quad \forall u \in H_\varepsilon^+ \text{ e } \forall v \in H_\varepsilon.$$

(b) $\Psi_\varepsilon \in C^1(S_\varepsilon^+, \mathbb{R})$ e

$$\Psi'_\varepsilon(u)v = \|m_\varepsilon(u)\|_\varepsilon J'_\varepsilon(m_\varepsilon(u))v, \quad \forall v \in T_u S_\varepsilon.$$

(c) *Se $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_d$ para Ψ_ε então $\{m_\varepsilon(u_n)\}$ é uma sequência $(PS)_d$ para J_ε . Se $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\varepsilon$ é uma sequência $(PS)_d$ limitada para J_ε então $\{m_\varepsilon^{-1}(u_n)\}$ é uma sequência $(PS)_d$ para Ψ_ε .*

(d) *u é um ponto crítico de Ψ_ε se, e somente se, $m_\varepsilon(u)$ é um ponto crítico não-trivial de J_ε . Além disso, os valores críticos correspondentes coincidem e*

$$\inf_{S_\varepsilon^+} \Psi_\varepsilon = \inf_{\mathcal{M}_\varepsilon} J_\varepsilon.$$

Lema 1.4.3

$$d_\varepsilon = \inf_{u \in \mathcal{M}_\varepsilon} J_\varepsilon(u) = \inf_{u \in H_\varepsilon^+} \max_{t>0} J_\varepsilon(tu) = \inf_{u \in S_\varepsilon^+} \max_{t>0} J_\varepsilon(tu).$$

1.4.2 Condição Palais-Smale

Uma das principais vantagens do funcional penalizado é que ele satisfaz a condição Palais-Smale, sendo assim, esta subseção será dedicada a prova dessa afirmação. Entretanto, a presença do termo não-local torna essa tarefa ainda mais complicada. Para contornar as dificuldades introduzimos o Lema 1.4.6, o qual não aparece em [10] e [39], o que nos permite dar uma demonstração diferente para a Proposição 1.4.2 .

Lema 1.4.4 *Seja $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_d$ para J_ε . Então $\{u_n\}$ é limitada.*

Demonstração: Uma vez que $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_d$ para J_ε , existe $C > 0$ tal que

$$C + \|u_n\|_\varepsilon \geq J_\varepsilon(u_n) - \frac{1}{\theta} J'_\varepsilon(u_n)u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Argumentando como na prova de (1.34), obtemos

$$C + \|u_n\|_\varepsilon \geq \left(\frac{\theta - 2}{2\theta}\right) \left(m_0 - \frac{1}{k}\right) \|u_n\|_\varepsilon^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto $\{u_n\}$ é limitada em H_ε . ■

Lema 1.4.5 *Seja $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_d$ para J_ε . Então, para cada $\xi > 0$, existe $R = R(\xi) > 0$ tal que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R} [|\nabla u_n|^2 + V(\varepsilon x)u_n^2] < \xi.$$

Demonstração: Seja $\eta_R \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\eta_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in B_R(0) \\ 1 & \text{se } x \notin B_{2R}(0). \end{cases}$$

com $0 \leq \eta_R(x) \leq 1$ e $|\nabla \eta_R| \leq C/R$, onde C é uma constante independente de R . Note que $\{\eta_R u_n\}$ é limitada em H_ε . Da definição de J_ε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R M(\|u_n\|_\varepsilon^2) [|\nabla u_n|^2 + V(\varepsilon x)u_n^2] &= J'_\varepsilon(u_n)u_n \eta_R + \int_{\mathbb{R}^3} g(\varepsilon x, u_n)u_n \eta_R \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^3} M(\|u_n\|_\varepsilon^2)u_n \nabla u_n \nabla \eta_R. \end{aligned}$$

Escolhendo $R > 0$ tal que $\Omega_\varepsilon \subset B_R(0)$, usando (M_1) , (M_2) e $(g_3)(ii)$, obtemos

$$\begin{aligned} m_0 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R [|\nabla u_n|^2 + V(\varepsilon x)u_n^2] &\leq J'_\varepsilon(u_n)u_n \eta_R \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{k} V(\varepsilon x)u_n^2 \eta_R - \int_{\mathbb{R}^3} M(\|u_n\|_\varepsilon^2)u_n \nabla u_n \nabla \eta_R. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(m_0 - \frac{1}{k}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R [|\nabla u_n|^2 + V(\varepsilon x)u_n^2] \leq |J'_\varepsilon(u_n)u_n \eta_R| + \int_{\mathbb{R}^3} M(\|u_n\|_\varepsilon^2)u_n |\nabla u_n \nabla \eta_R|.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em \mathbb{R}^3 , a desigualdade de Holder, a definição de η_R e a limitação de $\{u_n\}$ em H_ε , concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R} [|\nabla u_n|^2 + V(\varepsilon x)u_n^2] \leq C |J'_\varepsilon(u_n)u_n \eta_R| + \frac{C}{R} \|u_n\|_\varepsilon.$$

Sendo $\{u_n\}$ e $\{u_n \eta_R\}$ limitadas em H_ε , passando ao limite superior de $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R} [|\nabla u_n|^2 + V(\varepsilon x)u_n^2] \leq \frac{\tilde{C}}{R} < \xi,$$

sempre que $R = R(\xi) > \tilde{C}/\xi$. ■

Lema 1.4.6 *Seja $\{u_n\}$ uma seqüência $(PS)_d$ para J_ε tal que $u_n \rightarrow u$, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} [|\nabla u_n|^2 + V(\varepsilon x)u_n^2] = \int_{B_R} [|\nabla u|^2 + V(\varepsilon x)u^2].$$

Demonstração: Podemos assumir que $\|u_n\|_\varepsilon \rightarrow t_0$, assim $\|u\|_\varepsilon \leq t_0$. Seja $\eta_\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\eta_\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B_\rho(0) \\ 0 & \text{se } x \notin B_{2\rho}(0). \end{cases}$$

com $0 \leq \eta_\rho(x) \leq 1$. Definamos,

$$P_n(x) = M(\|u_n\|_\varepsilon^2) [|\nabla u_n - \nabla u|^2 + V(\varepsilon x)(u_n - u)^2].$$

Para cada $R > 0$ fixado, escolhendo $\rho > R$ obtemos

$$\int_{B_R} P_n = \int_{B_R} P_n \eta_\rho \leq M(\|u_n\|_\varepsilon^2) \int_{\mathbb{R}^3} [|\nabla u_n - \nabla u|^2 + V(\varepsilon x)(u_n - u)^2] \eta_\rho,$$

desenvolvendo o produto interno, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_R} P_n &\leq M(\|u_n\|_\varepsilon^2) \int_{\mathbb{R}^3} [|\nabla u_n|^2 + V(\varepsilon x)u_n^2] \eta_\rho \\ &\quad - 2M(\|u_n\|_\varepsilon^2) \int_{\mathbb{R}^3} [\nabla u_n \nabla u + V(\varepsilon x)u_n u] \eta_\rho \\ &\quad + M(\|u_n\|_\varepsilon^2) \int_{\mathbb{R}^3} [|\nabla u|^2 + V(\varepsilon x)u^2] \eta_\rho. \end{aligned}$$

Definindo

$$I_{n,\rho}^1 = M(\|u_n\|_\varepsilon^2) \int_{\mathbb{R}^3} [|\nabla u_n|^2 + V(\varepsilon x)u_n^2] \eta_\rho - \int_{\mathbb{R}^3} g(\varepsilon x, u_n) u_n \eta_\rho,$$

$$I_{n,\rho}^2 = M(\|u_n\|_\varepsilon^2) \int_{\mathbb{R}^3} [\nabla u_n \nabla u + V(\varepsilon x) u_n u] \eta_\rho - \int_{\mathbb{R}^3} g(\varepsilon x, u_n) u \eta_\rho,$$

$$I_{n,\rho}^3 = -M(\|u_n\|_\varepsilon^2) \int_{\mathbb{R}^3} [\nabla u_n \nabla u + V(\varepsilon x) u_n u] \eta_\rho + M(\|u_n\|_\varepsilon^2) \int_{\mathbb{R}^3} [|\nabla u|^2 + V(\varepsilon x) u^2] \eta_\rho$$

e

$$I_{n,\rho}^4 = \int_{\mathbb{R}^3} g(\varepsilon x, u_n) u_n \eta_\rho - \int_{\mathbb{R}^3} g(\varepsilon x, u_n) u \eta_\rho.$$

Temos que,

$$0 \leq \int_{B_R} P_n \leq I_{n,\rho}^1 - I_{n,\rho}^2 + I_{n,\rho}^3 + I_{n,\rho}^4 \leq |I_{n,\rho}^1| + |I_{n,\rho}^2| + |I_{n,\rho}^3| + |I_{n,\rho}^4|. \quad (1.36)$$

Observemos que

$$I_{n,\rho}^1 = J'_\varepsilon(u_n)(u_n \eta_\rho) - M(\|u_n\|_\varepsilon^2) \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \eta_\rho.$$

Sendo $\{u_n \eta_\rho\}$ limitada em H_ε , temos $J'_\varepsilon(u_n)(u_n \eta_\rho) = o_n(1)$. De um cálculo direto, temos que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| M(\|u_n\|_\varepsilon^2) \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \eta_\rho \right| \right] = 0.$$

Logo,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} |I_{n,\rho}^1| \right] = 0. \quad (1.37)$$

Vemos também que

$$I_{n,\rho}^2 = J'_\varepsilon(u_n)(u \eta_\rho) - M(\|u_n\|_\varepsilon^2) \int_{\mathbb{R}^3} u \nabla u_n \nabla \eta_\rho.$$

De modo análogo ao que foi feito, obtemos $J'_\varepsilon(u_n)(u \eta_\rho) = o_n(1)$ e

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| M(\|u_n\|_\varepsilon^2) \int_{\mathbb{R}^3} u \nabla u_n \nabla \eta_\rho \right| \right] = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} |I_{n,\rho}^2| \right] = 0. \quad (1.38)$$

Por outro lado, segue-se diretamente de $\|u_n\| \rightarrow t_0$ e da convergência fraca que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |I_{n,\rho}^3| = 0, \quad \forall \rho > R. \quad (1.39)$$

Finalmente, de

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L_{loc}^s(\mathbb{R}^3), \quad 1 \leq s < 6,$$

concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |I_{n,\rho}^4| = 0, \quad \forall \rho > R. \quad (1.40)$$

De (1.36), (1.37), (1.38), (1.39) e (1.40), obtemos

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} P_n \leq 0.$$

Donde, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} P_n = 0$ e conseqüentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} [|\nabla u_n|^2 + V(\varepsilon x)u_n^2] = \int_{B_R} [|\nabla u|^2 + V(\varepsilon x)u^2].$$

■

Proposição 1.4.2 *O funcional J_ε verifica a condição $(PS)_d$ em H_ε .*

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma seqüência $(PS)_d$ para J_ε . Do Lema 1.4.4 sabemos que $\{u_n\}$ é limitada em H_ε . Passando a uma subsequência, obtemos

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_\varepsilon.$$

Do Lema 1.4.5, segue-se que para cada $\xi > 0$ dado, existe $R = R(\xi) > \tilde{C}/\xi$ com \tilde{C} independente de ξ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R} [|\nabla u_n|^2 + V(\varepsilon x)u_n^2] < \xi.$$

Portanto, do Lema 1.4.6, temos

$$\begin{aligned} \|u\|_\varepsilon^2 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\varepsilon^2 \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\varepsilon^2 \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{B_R} [|\nabla u_n|^2 + V(\varepsilon x)u_n^2] + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R} [|\nabla u_n|^2 + V(\varepsilon x)u_n^2] \right\} \\ &= \int_{B_R} [|\nabla u|^2 + V(\varepsilon x)u^2] + \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R} [|\nabla u_n|^2 + V(\varepsilon x)u_n^2] \\ &< \int_{B_R} [|\nabla u|^2 + V(\varepsilon x)u^2] + \xi, \end{aligned}$$

onde $R = R(\xi) > \tilde{C}/\xi$. Passando ao limite de $\xi \rightarrow 0$ temos $R \rightarrow \infty$, daí

$$\|u\|_\varepsilon^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\varepsilon^2 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\varepsilon^2 \leq \|u\|_\varepsilon^2,$$

e assim $\|u_n\|_\varepsilon \rightarrow \|u\|_\varepsilon$ e conseqüentemente $u_n \rightarrow u$ in H_ε . ■

O seguinte corolário será importante na demonstração do Teorema 1.5.1.

Corolário 1.4.1 *O funcional Ψ_ε verifica a condição $(PS)_d$ sobre S_ε^+ .*

Demonstração: Seja $\{u_n\} \subset S_\varepsilon^+$ uma seqüência $(PS)_d$ para Ψ_ε . Assim,

$$\Psi_\varepsilon(u_n) \rightarrow d$$

e

$$\|\Psi'_\varepsilon(u_n)\|_* \rightarrow 0,$$

onde $\|\cdot\|_*$ é a norma no espaço dual $(T_{u_n}S_\varepsilon)'$. Da Proposição 1.4.1(c), temos que $\{m_\varepsilon(u_n)\}$ é uma seqüência $(PS)_d$ para J_ε em H_ε . Da Proposição 1.4.2 e do fato de \mathcal{M}_ε ser fechada (ver Lema 1.4.2(A₂)), concluímos que existe $u \in S_\varepsilon^+$ tal que, passando a uma subsequência,

$$m_\varepsilon(u_n) \rightarrow m_\varepsilon(u) \text{ em } H_\varepsilon.$$

Do Lema 1.4.2(A₃), obtemos

$$u_n \rightarrow u \text{ em } S_\varepsilon^+.$$

■

Estamos prontos para provar o resultado de existência para o problema auxiliar.

Teorema 1.4.1 *Suponha que a função M satisfaz $(M_1) - (M_2)$, o potencial V satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e a função f satisfaz $(f_1) - (f_4)$. Então, o problema auxiliar $(P_{\varepsilon,A})$ tem uma solução ground-state positiva $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$, para todo $\varepsilon > 0$.*

Demonstração: A existência de uma solução fraca, ground-state $u \in H_\varepsilon$ de $(P_{\varepsilon,A})$ é uma consequência de argumentos como no Lema 1.4.2(A₁), da Proposição 1.4.2 e de [[76], Theorem 1.17]. A positividade e a regularidade da solução seguem de argumentos análogos aqueles na demonstração do Teorema 1.3.1. ■

1.5 Multiplicidade de soluções para o problema auxiliar

Nesta seção relacionaremos o número de soluções positivas de $(P_{\varepsilon,A})$ com a topologia de Π , antes porém, necessitamos fazer algumas definições e obter alguns resultados preliminares.

1.5.1 Resultados preliminares

Sejam $\delta > 0$ fixado e $\Pi_\delta \subset \Omega$. Seja ainda $\eta \in C_0^\infty([0, \infty))$ verificando $0 \leq \eta(t) \leq 1$ e

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq \delta/2 \\ 0 & \text{se } t \geq \delta. \end{cases}$$

Denotamos por w uma solução ground-state positiva (ver Teorema 1.3.1) do problema

$$(P_{V_0}) \quad \begin{cases} \mathfrak{L}_{V_0} u = f(u), \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

onde

$$\mathfrak{L}_{V_0} u = M \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V_0 u^2 dx \right) [-\Delta u + V_0 u].$$

Para cada $y \in \Pi$, considere

$$\Upsilon_{\varepsilon,y}(x) = \eta(|\varepsilon x - y|) w \left(\frac{\varepsilon x - y}{\varepsilon} \right).$$

Desde que, para cada $y \in \Pi$, $\Upsilon_{\varepsilon,y}$ tem suporte compacto e contido em $B_{\delta/\varepsilon}(y/\varepsilon)$, temos que $\Upsilon_{\varepsilon,y} \in H_\varepsilon$. Além disso, sendo $B_{\delta/\varepsilon}(y/\varepsilon) \subset \Omega_\varepsilon$, obtemos $\Upsilon_{\varepsilon,y} \in H_\varepsilon^+$. Do Lema 1.4.2(A_1), para cada $\varepsilon > 0$, existe um único $t_\varepsilon > 0$ tal que

$$\max_{t \geq 0} J_\varepsilon(t\Upsilon_{\varepsilon,y}) = J_\varepsilon(t_\varepsilon \Upsilon_{\varepsilon,y}).$$

Agora, definimos as seguintes aplicações

$$\begin{aligned} \Upsilon_\varepsilon : \Pi &\longrightarrow \mathcal{M}_\varepsilon \\ y &\longmapsto \Upsilon_\varepsilon(y) = t_\varepsilon \Upsilon_{\varepsilon,y}. \end{aligned}$$

Seja $\rho > 0$ tal que $\Pi_\delta \subset B_\rho(0)$ e $\chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\chi(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| \leq \rho \\ \frac{\rho x}{|x|} & \text{se } |x| \geq \rho. \end{cases}$$

Definimos ainda $\beta_\varepsilon : \mathcal{M}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\beta_\varepsilon(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \chi(\varepsilon x) u(x)^2}{\int_{\mathbb{R}^3} u(x)^2}.$$

Lema 1.5.1 *Seja $\Pi = \{x \in \Omega : V(x) = V_0\}$. Então,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\Upsilon_\varepsilon(y)) = c_{V_0} \text{ uniformemente em } y \in \Pi. \quad (1.41)$$

Demonstração: Suponha por contradição que o limite em (1.41) não ocorra. Então, existem $\delta_0 > 0$ e sequências $\{y_n\} \subset \Pi$ e $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}_+$ verificando

$$|J_{\varepsilon_n}(\Upsilon_{\varepsilon_n}(y_n)) - c_{V_0}| \geq \delta_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.42)$$

com $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Da definição de $\Upsilon_{\varepsilon_n}(y_n)$, temos

$$J_{\varepsilon_n}(\Upsilon_{\varepsilon_n}(y_n)) = \frac{1}{2} \widehat{M} (t_{\varepsilon_n}^2 \|\Upsilon_{\varepsilon_n, y_n}\|_{\varepsilon_n}^2) - \int_{\mathbb{R}^3} G(\varepsilon_n x, t_{\varepsilon_n} \Upsilon_{\varepsilon_n, y_n}). \quad (1.43)$$

Além disso, sendo $\Upsilon_{\varepsilon_n}(y_n) \in \mathcal{M}_{\varepsilon_n}$, obtemos

$$J'_{\varepsilon_n}(\Upsilon_{\varepsilon_n}(y_n)) \Upsilon_{\varepsilon_n}(y_n) = 0. \quad (1.44)$$

Usando novamente a definição de $\Upsilon_{\varepsilon_n}(y_n)$ e considerando a mudança de variável $z = (\varepsilon_n x - y_n)/\varepsilon_n$, obtemos

$$\begin{aligned} J_{\varepsilon_n}(\Upsilon_{\varepsilon_n}(y_n)) = & \frac{1}{2} \widehat{M} \left(t_{\varepsilon_n}^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\eta(|\varepsilon_n z|)w(z))|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon_n z + y_n) (\eta(|\varepsilon_n z|)w(z))^2 \right) \right) \\ & - \int_{\mathbb{R}^3} G(\varepsilon_n z + y_n, t_{\varepsilon_n} \eta(|\varepsilon_n z|)w(z)). \end{aligned}$$

Denotando,

$$\Lambda_n^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\eta(|\varepsilon_n z|)w(z))|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon_n z + y_n) (\eta(|\varepsilon_n z|)w(z))^2,$$

a igualdade em (1.44) implica que

$$\frac{M(t_{\varepsilon_n}^2 \Lambda_n^2)}{t_{\varepsilon_n}^2 \Lambda_n^2} = \frac{1}{\Lambda_n^4} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{g(\varepsilon_n z + y_n, t_{\varepsilon_n} \eta(|\varepsilon_n z|)w(z))}{(t_{\varepsilon_n} \eta(|\varepsilon_n z|)w(z))^3} \right] (\eta(|\varepsilon_n z|)w(z))^4.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para todo $z \in B_{\delta/\varepsilon_n}(0)$, temos $\varepsilon_n z \in B_\delta(0)$. Assim,

$$\varepsilon_n z + y_n \in B_\delta(y_n) \subset \Pi_\delta \subset \Omega.$$

Uma vez que $G = F$ em Ω , segue-se de (1.43) que

$$J_{\varepsilon_n}(\Upsilon_{\varepsilon_n}(y_n)) = \frac{1}{2} \widehat{M}(t_{\varepsilon_n}^2 \Lambda_n^2) - \int_{\mathbb{R}^3} F(t_{\varepsilon_n} \eta(|\varepsilon_n z|)w(z)) \quad (1.45)$$

e

$$\frac{M(t_{\varepsilon_n}^2 \Lambda_n^2)}{t_{\varepsilon_n}^2 \Lambda_n^2} = \frac{1}{\Lambda_n^4} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{f(t_{\varepsilon_n} \eta(|\varepsilon_n z|)w(z))}{(t_{\varepsilon_n} \eta(|\varepsilon_n z|)w(z))^3} \right] (\eta(|\varepsilon_n z|)w(z))^4. \quad (1.46)$$

Do Teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\|\Upsilon_{\varepsilon_n, y_n}\|_{\varepsilon_n}^2 = \Lambda_n^2 \rightarrow \|w\|_{V_0}^2, \quad (1.47)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\eta(|\varepsilon_n z|)w(z)) \eta(|\varepsilon_n z|)w(z) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} f(w)w$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(\eta(|\varepsilon_n z|)w(z)) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} F(w), \quad (1.48)$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Agora, veremos que existe uma subsequência, que ainda será denotada por $\{t_{\varepsilon_n}\}$, tal que $t_{\varepsilon_n} \rightarrow 1$. De fato, desde que $\eta \equiv 1$ em $[0, \delta/2)$ e $B_{\delta/2}(0) \subset B_{\delta/2\varepsilon_n}(0)$ para n suficientemente grande, segue-se de (1.46) que

$$\frac{M(t_{\varepsilon_n}^2 \Lambda_n^2)}{t_{\varepsilon_n}^2 \Lambda_n^2} \geq \frac{1}{\Lambda_n^4} \int_{B_{\delta/2}(0)} \left[\frac{f(t_{\varepsilon_n} w(z))}{(t_{\varepsilon_n} w(z))^3} \right] w(z)^4.$$

Da continuidade de w , existe $\widehat{z} \in \mathbb{R}^3$ tal que $w(\widehat{z}) = \min_{z \in B_{\delta/2}(0)} w(z)$. Sendo assim,

de (1.4)

$$\frac{M(t_{\varepsilon_n}^2 \Lambda_n^2)}{t_{\varepsilon_n}^2 \Lambda_n^2} \geq \frac{1}{\Lambda_n^4} \frac{f(t_{\varepsilon_n} w(\widehat{z}))}{(t_{\varepsilon_n} w(\widehat{z}))^3} \int_{B_{\delta/2}(0)} w(z)^4. \quad (1.49)$$

Suponha por contradição que existe uma subsequência $\{t_{\varepsilon_n}\}$ com $|t_{\varepsilon_n}| \rightarrow \infty$. Passando ao limite de $n \rightarrow \infty$ em (1.49), concluímos de (M_2) e (f_3) que o lado direito da última desigualdade tende a infinito, enquanto o esquerdo é limitado. Mas isso não faz sentido. Portanto, $\{t_{\varepsilon_n}\}$ é limitada e passando a uma subsequência, obtemos $t_{\varepsilon_n} \rightarrow t_0$, com $t_0 \geq 0$. Note que $t_0 > 0$, pois se fosse $t_0 = 0$, concluiríamos de (1.46), (1.47), (M_2) , (f_1) e (f_2) que $\infty \leq 0$, o que é uma contradição.

Logo, passando ao limite de $n \rightarrow \infty$ em (1.46), teremos

$$M(t_0^2 \|w\|_{V_0}^2) \|w\|_{V_0}^2 t_0 = \int_{\mathbb{R}^3} f(t_0 w) w. \quad (1.50)$$

Uma vez que $w \in \mathcal{N}_{V_0}$, segue-se que $t_0 = 1$. Assim, passando ao limite de $n \rightarrow \infty$ em (1.45) e usando (1.47) e (1.48) obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\varepsilon_n}(\Upsilon_{\varepsilon_n}(y_n)) = I_{V_0}(w) = c_{V_0},$$

pois w é uma solução ground-state de (P_{V_0}) . Mas isso contradiz a desigualdade em (1.42). ■

Definamos agora o subconjunto $\widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon$ da variedade de Nehari \mathcal{M}_ε , por

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon = \{u \in \mathcal{M}_\varepsilon : J_\varepsilon(u) \leq c_{V_0} + h(\varepsilon)\},$$

onde $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função definida de modo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon) = 0 \text{ e } \Upsilon_\varepsilon(y) \in \widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \text{ e } y \in \Pi.$$

Uma tal função existe devido ao Lema 1.5.1. Logo, $\Upsilon_\varepsilon(\Pi) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$.

O próximo lema é um resultado fundamental para estabelecer existência de múltiplas soluções via teoria de categoria de Lusternik-Schnirelmann.

Lema 1.5.2

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\varepsilon(\Upsilon_\varepsilon(y)) = y \text{ uniformemente em } y \in \Pi. \quad (1.51)$$

Demonstração: Suponhamos por contradição que a convergência em (1.51) não ocorre, isto é, existem $\delta > 0$ e seqüências $(y_n) \subset \Pi$ e $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}_+$ tais que

$$|\beta_{\varepsilon_n}(\Upsilon_{\varepsilon_n}(y_n)) - y_n| \geq \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Por definição,

$$\beta_{\varepsilon_n}(\Upsilon_{\varepsilon_n}(y_n)) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \chi(\varepsilon_n x) t_{\varepsilon_n}^2 \left[\eta(|\varepsilon_n x - y_n|) w\left(\frac{\varepsilon_n x - y_n}{\varepsilon_n}\right) \right]^2}{\int_{\mathbb{R}^3} t_{\varepsilon_n}^2 \left[\eta(|\varepsilon_n x - y_n|) w\left(\frac{\varepsilon_n x - y_n}{\varepsilon_n}\right) \right]^2}.$$

Considerando a mudança de variável $z = (\varepsilon_n x - y_n)/\varepsilon_n$, obtemos

$$\beta_{\varepsilon_n}(\Upsilon_{\varepsilon_n}(y_n)) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \chi(\varepsilon_n z + y_n) [\eta(|\varepsilon_n z|) w(z)]^2}{\int_{\mathbb{R}^3} [\eta(|\varepsilon_n z|) w(z)]^2}.$$

Assim,

$$\beta_{\varepsilon_n}(\Upsilon_{\varepsilon_n}(y_n)) = y_n + \frac{\int_{\mathbb{R}^3} [\chi(\varepsilon_n z + y_n) - y_n] [\eta(|\varepsilon_n z|) w(z)]^2}{\int_{\mathbb{R}^3} [\eta(|\varepsilon_n z|) w(z)]^2}.$$

Do Teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que

$$|\beta_{\varepsilon_n}(\Upsilon_{\varepsilon_n}(y_n)) - y_n| = o_n(1),$$

o que é uma contradição. Portanto o limite em (1.51) ocorre. ■

O próximo resultado será usado nas demonstrações do Lema 1.6.1.

Proposição 1.5.1 *Seja $\{u_n\}$ uma seqüência em $H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que*

$$J_{\varepsilon_n}(u_n) \rightarrow c_{V_0} \tag{1.52}$$

e

$$J'_{\varepsilon_n}(u_n)u_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.53}$$

com $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então, existe uma sequência $\{\tilde{y}_n\} \subset \mathbb{R}^3$ tal que a sequência $v_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$ tem uma subsequência convergente em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Além disso, passando a uma subsequência,

$$y_n \rightarrow \bar{y},$$

onde $y_n = \varepsilon_n \tilde{y}_n$ e $\bar{y} \in \Pi$.

Demonstração:

Afirmção Existem $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^3$ e constantes positivas R e α tais que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(\tilde{y}_n)} u_n^2 \geq \alpha > 0. \quad (1.54)$$

Prova da Afirmção: Do contrário, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_R(y)} u_n^2 = 0, \quad \forall R > 0.$$

Segue-se de (1.52), (1.53), (M_2) , (V_1) e (g_3) que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e por [[76], Lemma 1.21],

$$u_n \rightarrow 0 \text{ em } L^s(\mathbb{R}^3), 2 < s < 6.$$

Desde que $g \leq f$, resulta que

$$M(\|u_n\|_{\varepsilon_n}^2) \|u_n\|_{\varepsilon_n}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} f(u_n) u_n.$$

De (M_1) , (M_2) , (f_1) e (f_2)

$$\|u_n\|_{\varepsilon_n}^2 \rightarrow 0,$$

e portanto $J_{\varepsilon_n}(u_n) \rightarrow 0 = c_{V_0}$, o que é uma contradição. A afirmação está provada. \square

Considere $v_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$. Da invariância por translação de \mathbb{R}^3 , $\{v_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e portanto, passando a uma subsequência, obtemos

$$v_n \rightharpoonup v, \text{ em } H^1(\mathbb{R}^3),$$

com $v \neq 0$, devido a (1.54). Para cada n , seja $t_n > 0$ tal que $\tilde{v}_n = t_n v_n \in \mathcal{N}_{V_0}$. De (M_1) , temos que

$$\begin{aligned}
c_{V_0} &\leq I_{V_0}(\tilde{v}_n) \\
&= \frac{1}{2} \widehat{M}(t_n^2 \|v_n\|_{V_0}^2) - \int_{\mathbb{R}^3} F(t_n v_n) \\
&= \frac{1}{2} \widehat{M}(t_n^2 \|u_n\|_{V_0}^2) - \int_{\mathbb{R}^3} F(t_n u_n) \\
&\leq \frac{1}{2} \widehat{M}(t_n^2 \|u_n\|_{\varepsilon_n}^2) - \int_{\mathbb{R}^3} G(\varepsilon_n x, t_n u_n). \tag{1.55}
\end{aligned}$$

De (1.52), (1.53) e (1.55), obtemos

$$c_{V_0} \leq I_{V_0}(\tilde{v}_n) \leq J_{\varepsilon_n}(t_n u_n) \leq J_{\varepsilon_n}(u_n) = c_{V_0} + o_n(1). \tag{1.56}$$

Daí,

$$I_{V_0}(\tilde{v}_n) \rightarrow c_{V_0} \text{ e } \{\tilde{v}_n\} \subset \mathcal{N}_{V_0}. \tag{1.57}$$

Logo, $\{\tilde{v}_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e $\tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{v}$. Uma vez que $\{v_n\}$ não converge para 0 em H_{V_0} , existe $\delta > 0$ tal que $\|v_n\|_{V_0} \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$0 \leq |t_n| \delta \leq \|t_n v_n\|_{V_0} = \|\tilde{v}_n\|_{V_0}.$$

Sendo $\{\tilde{v}_n\}$ limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$, concluímos que $\{t_n\}$ é limitada e a menos de subsequência $t_n \rightarrow t_0 \geq 0$. Observe que $t_0 > 0$, pois se $t_0 = 0$, resulta da limitação de $\{v_n\}$ que

$$\|\tilde{v}_n\|_{V_0} = \|t_n v_n\|_{V_0} \leq |t_n| K \rightarrow 0,$$

donde $\tilde{v}_n \rightarrow 0$ em H_{V_0} . Da continuidade de I_{V_0} , obtemos $c_{V_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{V_0}(\tilde{v}_n) = 0$, o que é uma contradição.

Da unicidade do limite fraco $\tilde{v} = t_0 v$, $v \neq 0$. Do Lema 1.3.5,

$$\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v} \text{ em } H^1(\mathbb{R}^3). \tag{1.58}$$

Assim

$$v_n \rightarrow \frac{\tilde{v}}{t_0} = v \text{ em } H^1(\mathbb{R}^3).$$

Além disso,

$$I_{V_0}(\tilde{v}) = c_{V_0} \text{ e } I'_{V_0}(\tilde{v}) = 0. \quad (1.59)$$

Agora, mostraremos que $\{y_n\}$ é limitada, onde $y_n = \varepsilon_n \tilde{y}_n$. De fato, do contrário, existe uma subsequência $\{y_n\}$ com $|y_n| \rightarrow \infty$. Como $u_n \in \mathcal{M}_{\varepsilon_n}$, considerando $x = z + \tilde{y}_n$, obtemos

$$M(\Lambda_n^2)(\Lambda_n^2) = \int_{\mathbb{R}^3} g(\varepsilon_n z + y_n, v_n) v_n, \quad (1.60)$$

onde $\Lambda_n^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon_n z + y_n) v_n^2$. O que implica

$$m_0 \|v_n\|_{V_0}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} g(\varepsilon_n z + y_n, v_n) v_n.$$

Seja $R > 0$ tal que $\Omega \subset B_R(0)$, então para cada $z \in B_{R/\varepsilon_n}(0)$ temos

$$|\varepsilon_n z| \leq R \text{ e } -|\varepsilon_n z| \geq -R.$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $|y_n| \geq 2R$. Assim,

$$|\varepsilon_n z + y_n| \geq |y_n| - |\varepsilon_n z| \geq 2R - R = R.$$

Conseqüentemente,

$$m_0 \|v_n\|_{V_0}^2 \leq \int_{B_{R/\varepsilon_n}(0)} \tilde{f}(v_n) v_n + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{R/\varepsilon_n}(0)} f(v_n) v_n.$$

Desde que $v_n \rightarrow v$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, segue-se do Teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{R/\varepsilon_n}(0)} f(v_n) v_n = o_n(1).$$

Por outro lado, visto que $\tilde{f}(v_n) \leq (V_0/k)v_n$, obtemos

$$m_0 \|v_n\|_{V_0}^2 \leq \frac{1}{k} \int_{B_{R/\varepsilon_n}(0)} V_0 v_n^2 + o_n(1),$$

e portanto,

$$\left(m_0 - \frac{1}{k}\right) \|v_n\|_{V_0} \leq o_n(1). \quad (1.61)$$

Mostrando que $\|v_n\|_{V_0} \rightarrow 0$ em \mathbb{R} .

Passando ao limite de $n \rightarrow \infty$ em (1.61), obtemos $v = 0$, o que é uma contradição. Logo, $\{y_n\}$ é limitada e podemos assumir que $y_n \rightarrow \bar{y}$ em \mathbb{R}^3 .

Vejamos que $\bar{y} \in \bar{\Omega}$. Com efeito, suponha por contradição que $\bar{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$. Desde que $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(\bar{y}) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ e, passando a uma subsequência,

$$y_n \in B_{r/2}(\bar{y}) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que, para todo $z \in B_{r/2\varepsilon_n}(\bar{y})$, vale

$$|\varepsilon_n z + y_n - \bar{y}| \leq |\varepsilon_n z| + |y_n - \bar{y}| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Portanto,

$$m_0 \|v_n\|_{V_0}^2 \leq \int_{B_{\frac{r}{2\varepsilon_n}}(0)} \tilde{f}(v_n) v_n + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{\frac{r}{2\varepsilon_n}}(0)} f(v_n) v_n,$$

e passando ao limite de $n \rightarrow \infty$, obtemos $v = 0$, o que é uma contradição. Logo $\bar{y} \in \bar{\Omega}$.

Finalmente, mostraremos que $V(\bar{y}) = V_0$, pois isto implica que $\bar{y} \notin \partial\Omega$ e portanto $\bar{y} \in \Pi$. Suponhamos por contradição que $V(\bar{y}) > V_0$. Consequentemente,

$$c_{V_0} = I_{V_0}(\tilde{v}) < \frac{1}{2} \widehat{M}(\|\tilde{v}\|_{V(\bar{y})}^2) - \int_{\mathbb{R}^3} F(\tilde{v}).$$

De (1.58) e do Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} c_{V_0} &< \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \widehat{M} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \tilde{v}_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon_n z + y_n) \tilde{v}_n^2 \right) - \int_{\mathbb{R}^3} F(\tilde{v}_n) \right] \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_{\varepsilon_n}(t_n u_n) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) = c_{V_0}, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo, $V(\bar{y}) = V_0$ e a proposição está demonstrada. ■

O próximo resultado será usado na demonstração do Lema 1.6.1.

Corolário 1.5.1 *Assumimos as mesmas hipóteses da Proposição 1.5.1. Então, para cada $\gamma > 0$ dado, existem $R > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\int_{B_R(\bar{y}_n)^c} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) < \gamma, \quad \forall n \geq n_0.$$

Demonstração: Usando a mesma notação da prova da Proposição 1.5.1, concluímos que para cada $R > 0$

$$\int_{B_R(\tilde{y}_n)^c} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) = \int_{B_R(0)^c} (|\nabla v_n|^2 + |v_n|^2).$$

Sendo $\{v_n\}$ fortemente convergente em $H^1(\mathbb{R}^3)$, o resultado segue. ■

1.5.2 Resultado de multiplicidade de soluções para o problema auxiliar

No que segue provaremos nosso principal resultado relacionado ao problema $(P_{\varepsilon,A})$, usando argumentos ligeiramente diferentes daqueles que aparecem em [74]. De fato, desde que S_ε^+ é um espaço métrico não-completo, não podemos usar diretamente um resultado abstrato como em [[35], Theorem 2.1]. Em vez disso, invocamos o resultado abstrato de categoria em [72].

Teorema 1.5.1 *Suponha que a função M satisfaz $(M_1) - (M_2)$, o potencial V satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e a função f satisfaz $(f_1) - (f_4)$. Então, dado $\delta > 0$ existe $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\delta) > 0$ tal que o problema auxiliar $(P_{\varepsilon,A})$ tem pelo menos $\text{cat}_{\Pi_\delta}(\Pi)$ soluções positivas, para todo $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$.*

Demonstração: Desde que M e f são apenas contínuas, \mathcal{M}_ε não é uma $C^{1,1}$ -subvariedade de H_ε e portanto não podemos aplicar [[35], Theorem 2.1] diretamente a \mathcal{M}_ε .

Felizmente, S_ε^+ é uma $C^{1,1}$ -subvariedade de H_ε^+ e, além disso, provamos que m_ε é um homeomorfismo entre \mathcal{M}_ε e S_ε^+ . Entretanto, ainda não podemos aplicar [[35], Theorem 2.1] a $\Psi_\varepsilon \in C^1(S_\varepsilon^+, \mathbb{R})$, visto que S_ε^+ é não-completo como espaço métrico.

Para contornar essa dificuldade, definimos

$$\zeta_\varepsilon(y) = m_\varepsilon^{-1}(\Upsilon_\varepsilon(y)), \quad \forall y \in \Pi.$$

Do Lema 1.5.1, obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi_\varepsilon(\zeta_\varepsilon(y)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\Upsilon_\varepsilon(y)) = c_{V_0}. \quad (1.62)$$

Além disso, definimos

$$\tilde{S}_\varepsilon^+ = \{u \in S_\varepsilon^+ : \Psi_\varepsilon(u) \leq c_{V_0} + h(\varepsilon)\},$$

onde a aplicação h já foi introduzida na definição do conjunto $\widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon$. De (1.62) temos que $\zeta_\varepsilon(\Pi) \subset \tilde{S}_\varepsilon^+$, para todo $\varepsilon > 0$ pequeno.

Dos Lemas 1.4.2(A_3) e 1.5.2 o diagrama de aplicações contínuas abaixo está bem definido, para ε suficientemente pequeno,

$$\Pi \xrightarrow{\Upsilon_\varepsilon} \Upsilon_\varepsilon(\Pi) \xrightarrow{m_\varepsilon^{-1}} \zeta_\varepsilon(\Pi) \xrightarrow{m_\varepsilon} \Upsilon_\varepsilon(\Pi) \xrightarrow{\beta_\varepsilon} \Pi_\delta.$$

Segue-se do Lema 1.5.2, que para ε suficientemente pequeno, existe uma aplicação $\lambda : \Pi \rightarrow B_{\delta/2}(0)$ tal que $\beta_\varepsilon(\Upsilon_\varepsilon(y)) = y + \lambda(y)$.

Definimos $H : [0, 1] \times \Pi \rightarrow \Pi_\delta$ por $H(t, y) = y + (1 - t)\lambda(y)$. Assim, $H(0, y) = \beta_\varepsilon(\Upsilon_\varepsilon(y))$ e $H(1, y) = y$ para todo $y \in \Pi$. Sejam $\zeta_\varepsilon = m_\varepsilon^{-1} \circ \Upsilon_\varepsilon$ e $\alpha_\varepsilon = \beta_\varepsilon \circ m_\varepsilon$. Temos que $\alpha_\varepsilon \circ \zeta_\varepsilon = \beta_\varepsilon \circ \Upsilon_\varepsilon$ é homotópica a inclusão $i : \Pi \rightarrow \Pi_\delta$. Resulta da Proposição 2.0.3, no Apêndice B, que

$$cat_{\zeta_\varepsilon(\Pi)}(\zeta_\varepsilon(\Pi)) \geq cat_{\Pi_\delta}(\Pi). \quad (1.63)$$

Segue do Corolário 1.4.1 e do resultado abstrato de categoria em [72], com $c = d_\varepsilon \leq c_{V_0} + h(\varepsilon) = d$ e $K = \zeta_\varepsilon(\Pi)$, que Ψ_ε tem pelo menos $cat_{\zeta_\varepsilon(\Pi)}(\zeta_\varepsilon(\Pi))$ pontos críticos sobre \tilde{S}_ε^+ . Assim, da Proposição 1.4.1(d) e de (1.63), concluímos que J_ε tem pelo menos $cat_{\Pi_\delta}(\Pi)$ pontos críticos. ■

1.6 Demonstração do principal Teorema do capítulo 1

Nesta seção provaremos o principal resultado deste capítulo. A idéia é mostrar que as soluções obtidas no Teorema 1.5.1 satisfazem $u_\varepsilon(x) < a$, para todo $x \in \Omega_\varepsilon^c$, quando ε é suficientemente pequeno. Esse fato implica que tais soluções são realmente soluções do problema original (P_ε). Um ponto fundamental para alcançarmos esse propósito é o seguinte resultado, cuja prova é uma adaptação de argumentos encontrados em [11] e está baseada no método de iteração de Moser em [62].

Lema 1.6.1 *Sejam $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ e $u_n \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\varepsilon_n}$ uma solução de $(P_{\varepsilon_n, A})$. Então $J_{\varepsilon_n}(u_n) \rightarrow c_{V_0}$ e $u_n \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Além disso, para cada $\gamma > 0$ dado, existem $R > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(\tilde{y}_n)^c)} < \gamma, \quad \forall n \geq n_0, \quad (1.64)$$

onde \tilde{y}_n é dado pela Proposição 1.5.1.

Demonstração: Desde que $J_{\varepsilon_n}(u_n) \leq c_{V_0} + h(\varepsilon_n)$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} h(\varepsilon_n) = 0$, podemos argumentar como na prova da desigualdade (1.56) para concluir que

$$J_{\varepsilon_n}(u_n) \rightarrow c_{V_0}.$$

Assim, podemos invocar a Proposição 1.5.1 para obter uma sequência $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^3$ satisfazendo a conclusão daquela Proposição.

Fixemos $R > 1$ e consideremos $\eta_R \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $0 \leq \eta_R \leq 1$, $\eta_R \equiv 0$ em $B_{R/2}(0)$, $\eta_R \equiv 1$ em $B_R(0)^c$ e $|\nabla \eta_R| \leq C/R$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $L > 0$, definimos $\eta_n(x) := \eta_R(x + \tilde{y}_n)$, $u_{L,n}, z_{L,n} \in H_\varepsilon$ por

$$u_{L,n}(x) := \min\{u_n(x), L\} \text{ e } z_{L,n} := \eta_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} u_n,$$

onde $\beta > 1$ será escolhido posteriormente.

Das definições de $u_{L,n}$ e $z_{L,n}$, de $J'_{\varepsilon_n}(u_n)z_{L,n} = 0$, de (M_1) e (M_2) , concluímos que

$$\begin{aligned} m_0 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} |\nabla u_n|^2 + 2M(\|u_n\|_{\varepsilon_n}^2) \int_{\mathbb{R}^3} \eta_n u_n u_{L,n}^{2(\beta-1)} \nabla \eta_n \cdot \nabla u_n \\ \leq \int_{\mathbb{R}^3} [g(\varepsilon_n x, u_n) - m_0 V(\varepsilon_n x) u_n] \eta_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} u_n. \end{aligned}$$

Uma vez que $u_n > 0$, $g(x, t) \leq (V_0/k)t + C_2 t^{q-1}$, para todos $x \in \mathbb{R}^3$ e $t \geq 0$, e vale (V_1) , obtemos

$$\begin{aligned} m_0 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} |\nabla u_n|^2 &\leq 2M(\|u_n\|_{\varepsilon_n}^2) \int_{\mathbb{R}^3} \eta_n u_n u_{L,n}^{2(\beta-1)} |\nabla \eta_n| |\nabla u_n| \\ &+ \left(\frac{1}{k} - m_0\right) \int_{\mathbb{R}^3} V_0 u_n^2 \eta_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} + C_2 \int_{\mathbb{R}^3} u_n^q \eta_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)}. \end{aligned}$$

Sendo $k > 1/m_0$ e $\{\|u_n\|_{\varepsilon_n}\}$ limitada em \mathbb{R} , temos

$$m_0 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} |\nabla u_n|^2 \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_n u_n u_{L,n}^{2(\beta-1)} |\nabla \eta_n| |\nabla u_n| + C_2 \int_{\mathbb{R}^3} u_n^q \eta_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)}.$$

Para cada $\tilde{\gamma} > 0$ dado, segue da desigualdade de Young que

$$m_0 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} |\nabla u_n|^2 \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^3} (\tilde{\gamma} \eta_n^2 |\nabla u_n|^2 + C_{\tilde{\gamma}} u_n^2 |\nabla \eta_n|^2) u_{L,n}^{2(\beta-1)} + C_2 \int_{\mathbb{R}^3} u_n^q \eta_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)}.$$

Tomando $\tilde{\gamma} \leq m_0/2C_1$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \eta_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} |\nabla u_n|^2 \leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 |\nabla \eta_n|^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} + \int_{\mathbb{R}^3} u_n^q \eta_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} \right). \quad (1.65)$$

Sejam S a melhor constante da imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ e $\hat{u}_{L,n} := \eta_n u_n u_{L,n}^{\beta-1}$. Segue-se que

$$\begin{aligned} S^{-1} |\hat{u}_{L,n}|_6^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| \nabla \left(\eta_n u_n u_{L,n}^{\beta-1} \right) \right|^2 \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} |\nabla \eta_n|^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_n^2 \left| \nabla \left(u_n u_{L,n}^{\beta-1} \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \eta_n^2 \left| \nabla \left(u_n u_{L,n}^{\beta-1} \right) \right|^2 &= \int_{\{u_n \leq L\}} \eta_n^2 \left| \nabla \left(u_n u_{L,n}^{\beta-1} \right) \right|^2 + \int_{\{u_n > L\}} \eta_n^2 \left| \nabla \left(u_n u_{L,n}^{\beta-1} \right) \right|^2 \\ &= \int_{\{u_n \leq L\}} \eta_n^2 \left| \nabla (u_n^\beta) \right|^2 + \int_{\{u_n > L\}} \eta_n^2 L^{2(\beta-1)} |\nabla u_n|^2 \\ &\leq \beta^2 \int_{\mathbb{R}^3} \eta_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} |\nabla u_n|^2. \end{aligned} \quad (1.67)$$

De (1.66) e (1.67), resulta que

$$|\hat{u}_{L,n}|_6^2 \leq C_3 \beta^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} |\nabla \eta_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \eta_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} |\nabla u_n|^2 \right). \quad (1.68)$$

As desigualdades em (1.65) e (1.68) implicam

$$|\hat{u}_{L,n}|_6^2 \leq C_4 \beta^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} |\nabla \eta_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \eta_n^2 u_n^q u_{L,n}^{2(\beta-1)} \right), \quad (1.69)$$

para todo $\beta > 1$.

A desigualdade em (1.69), as propriedades de η_n e o fato de que $u_{L,n} \leq u_n$, nos dão

$$|\hat{u}_{L,n}|_6^2 \leq C_4 \beta^2 \int_{B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c} (u_n^{2\beta} |\nabla \eta_n|^2 + u_n^{q-2} u_n^{2\beta}). \quad (1.70)$$

Definamos agora

$$t := \frac{2^*2^*}{2(q-2)} = \frac{18}{q-2} > 1 \text{ e } \alpha := \frac{2t}{t-1} < 6. \quad (1.71)$$

Aplicando a desigualdade de Holder com os expoentes $t/(t-1)$ e t em (1.70), teremos

$$\begin{aligned} |\widehat{u}_{L,n}|_6^2 &\leq C_4\beta^2 |u_n|_{L^{\beta\alpha}(B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c)}^{2\beta} \left(\int_{B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c} |\nabla\eta_n|^{2t} \right)^{1/t} \\ &\quad + C_4\beta^2 |u_n|_{L^{\beta\alpha}(B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c)}^{2\beta} \left(\int_{B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c} u_n^{18} \right)^{1/t}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Desde que η_n é constante sobre $B_{R/2}(\tilde{y}_n) \cup B_R(\tilde{y}_n)^c$ e $|\nabla\eta_n| \leq C/R$, concluímos que

$$\int_{B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c} |\nabla\eta_n|^{2t} = \int_{R/2 \leq |x-\tilde{y}_n| \leq R} |\nabla\eta_n|^{2t} \leq \frac{C_5}{R^{2t-3}} \leq C_5, \quad (1.73)$$

observe que usamos $R > 1$ e $2t > 3$ na última desigualdade.

Afirmção 1.6.1 *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ e $K > 0$ tais que, para cada $n \geq n_0$, temos*

$$\int_{B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c} u_n^{18} \leq K.$$

Assumindo por um momento que essa afirmação é verdadeira, podemos usar (1.72) e (1.73) para concluir que

$$|\widehat{u}_{L,n}|_6^2 \leq C_6\beta^2 |u_n|_{L^{\beta\alpha}(B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c)}^{2\beta}.$$

Desde que

$$\begin{aligned} |u_{L,n}|_{L^{6\beta}(B_R(\tilde{y}_n)^c)}^{2\beta} &= \left(\int_{B_R(\tilde{y}_n)^c} u_{L,n}^{6\beta} \right)^{1/3} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \eta_n^6 u_n^6 u_{L,n}^{6(\beta-1)} \right)^{1/3} \\ &= |\widehat{u}_{L,n}|_6^2 \\ &\leq C_6\beta^2 |u_n|_{L^{\beta\alpha}(B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c)}^{2\beta}, \end{aligned}$$

podemos aplicar o Lema de Fatou na variável L e obter

$$|u_n|_{L^{6\beta}(B_R(\tilde{y}_n)^c)} \leq C_7^{1/\beta} \beta^{1/\beta} |u_n|_{L^{\beta\alpha}(B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c)}, \quad (1.74)$$

sempre que $u_n^{\beta\alpha} \in L^1(B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c)$.

Definamos agora $\beta := 6/\alpha > 1$ e notemos que, de $u_n \in L^6(\mathbb{R}^3)$, a desigualdade em (1.74) ocorre para essa escolha de β . Além disso, sendo $\beta^2\alpha = 6\beta$, segue-se que (1.74) ocorre para β^2 . Assim,

$$|u_n|_{L^{6\beta^2}(B_R(\tilde{y}_n)^c)} \leq C_7^{1/\beta^2} \beta^{2/\beta^2} |u_n|_{L^{\beta^2\alpha}(B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c)}.$$

Por um processo iterativo e notando que $\beta\alpha = 6$ obtemos, para $m \in \mathbb{N}$,

$$|u_n|_{L^{6\beta^m}(B_R(\tilde{y}_n)^c)} \leq C_7^{\sum_{i=1}^m \beta^{-i}} \beta^{\sum_{i=1}^m i\beta^{-i}} |u_n|_{L^6(B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c)}.$$

Desde que $\beta > 1$, podemos passar ao limite de $m \rightarrow \infty$ para obter

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(\tilde{y}_n)^c)} \leq C_8 |u_n|_{L^6(B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c)}.$$

Considerando a mudança de variável $z = x - \tilde{y}_n$, temos que

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(\tilde{y}_n)^c)} \leq C_8 \left(\int_{B_{R/2}(0)^c} |u_n(z + \tilde{y}_n)|^6 dz \right)^{\frac{1}{6}} = C_8 \left(\int_{B_{R/2}(0)^c} |v_n|^6 \right)^{\frac{1}{6}},$$

onde $v_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$.

Da Proposição 1.5.1 concluímos que v_n converge fortemente em $L^6(\mathbb{R}^3)$. Assim, para $R > 0$ suficientemente grande, resulta que

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(\tilde{y}_n)^c)} < \gamma,$$

para n grande. Provando a desigualdade em (1.64).

Prova da Afirmação 1.6.1: Consideremos a função dada por $\tilde{\eta}_n(x) := \eta_n(2x)$, de modo que $\tilde{\eta}_n \equiv 0$ sobre $B_{R/4}(\tilde{y}_n)$ e $\tilde{\eta}_n \equiv 1$ sobre $B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c$. Se $\tilde{u}_{L,n} := \tilde{\eta}_n u_n u_{L,n}^{\beta-1}$, procedendo como antes, provamos a seguinte versão de (1.69)

$$|\tilde{u}_{L,n}|_6^2 \leq C_9 \beta^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)} |\nabla \tilde{\eta}_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\eta}_n^2 u_n^6 u_{L,n}^{2(\beta-1)} \right). \quad (1.75)$$

Definimos $\beta := 3$, para obter

$$|\tilde{u}_{L,n}|_6^2 \leq C_{10} \left(\int_{B_{R/4}(\tilde{y}_n)^c} u_n^2 u_{L,n}^4 |\nabla \tilde{\eta}_n|^2 + \int_{B_{R/4}(\tilde{y}_n)^c} \tilde{\eta}_n^2 u_n^2 u_{L,n}^4 u_n^4 \right).$$

Da desigualdade de Holder com os expoentes 3 e 3/2, obtemos

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_{L,n}|_6^2 &\leq C_{10} \int_{B_{R/4}(\tilde{y}_n)^c} u_n^2 u_{L,n}^4 |\nabla \tilde{\eta}_n|^2 \\ &+ C_{10} \left[\int_{B_{R/4}(\tilde{y}_n)^c} (\tilde{\eta}_n u_n u_{L,n}^2)^6 \right]^{1/3} |u_n|_{L^6(B_R(\tilde{y}_n)^c)}^4. \end{aligned}$$

Do Corolário 1.5.1, existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $R > 1$ tais que

$$\int_{B_R(\tilde{y}_n)^c} |u_n|^6 \leq \left(\frac{1}{2C_{10}} \right)^{3/2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Assim, recordando que $\tilde{\eta}_n u_n u_{L,n}^2 = \tilde{u}_{L,n}$, $u_{L,n} \leq u_n$ e $|\nabla \tilde{\eta}_n|$ é limitada, obtemos

$$|\tilde{u}_{L,n}|_6^2 \leq C_{11} \int_{B_{R/4}(\tilde{y}_n)^c} u_n^2 u_{L,n}^4 |\nabla \tilde{\eta}_n|^2 \leq C_{11} \int_{B_{R/4}(\tilde{y}_n)^c} u_n^6 \leq C_{12}.$$

A definição de $\tilde{\eta}_n$ e a desigualdade anterior implicam que

$$\left(\int_{B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c} u_n^6 u_{L,n}^{12} \right)^{1/3} \leq |\tilde{u}_{L,n}|_6^2 \leq C_{12}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Usando o Lema de Fatou na variável L , teremos

$$\int_{B_{R/2}(\tilde{y}_n)^c} u_n^{18} \leq K := C_{12}^3, \quad \forall n \geq n_0,$$

e portanto a afirmação é verdadeira. \square

A demonstração está completa. ■

Finalmente, estamos em condições de demonstrar o principal resultado deste capítulo.

Demonstração do Teorema 1.1.1:

Suponhamos que $\delta > 0$ é tal que $\Pi_\delta \subset \Omega$. Primeiramente mostraremos que existe $\tilde{\varepsilon}_\delta > 0$ tal que, para cada $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}_\delta$ e qualquer solução $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon$ do problema $(P_{\varepsilon,A})$, vale

$$|u|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon)} < a. \quad (1.76)$$

De fato, suponhamos por contradição que para alguma sequência $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ existe $u_n \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\varepsilon_n}$ tal que $J'_{\varepsilon_n}(u_n) = 0$ e

$$|u_n|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{\varepsilon_n})} \geq a. \quad (1.77)$$

Do Lema 1.6.1, temos que $J_{\varepsilon_n}(u_n) \rightarrow c_{V_0}$ e portanto podemos usar a Proposição 1.5.1 para obter uma sequência $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\varepsilon_n \tilde{y}_n \rightarrow y_0 \in \Pi$.

Se tomarmos $r > 0$ tal que $B_r(y_0) \subset B_{2r}(y_0) \subset \Omega$, temos que

$$B_{r/\varepsilon_n}(y_0/\varepsilon_n) = (1/\varepsilon_n)B_r(y_0) \subset \Omega_{\varepsilon_n}.$$

Além disso, para cada $z \in B_{r/\varepsilon_n}(\tilde{y}_n)$, ocorre

$$\left| z - \frac{y_0}{\varepsilon_n} \right| \leq |z - \tilde{y}_n| + \left| \tilde{y}_n - \frac{y_0}{\varepsilon_n} \right| < \frac{1}{\varepsilon_n}(r + o_n(1)) < \frac{2r}{\varepsilon_n},$$

para n grande. Para esses valores de n , temos que $B_{r/\varepsilon_n}(\tilde{y}_n) \subset \Omega_{\varepsilon_n}$, ou equivalentemente, $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{\varepsilon_n} \subset \mathbb{R}^3 \setminus B_{r/\varepsilon_n}(\tilde{y}_n)$. Por outro lado, segue-se do Lema 1.6.1 com $\gamma = a$ que, para cada $n \geq n_0$ tal que $r/\varepsilon_n > R$, obtemos

$$|u_n|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{\varepsilon_n})} \leq |u_n|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus B_{r/\varepsilon_n}(\tilde{y}_n))} \leq |u_n|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus B_R(\tilde{y}_n))} < a,$$

o que contradiz (1.77) e prova nossa afirmação.

Seja $\bar{\varepsilon}_\delta > 0$ dado pelo Teorema 1.5.1 e seja $\varepsilon_\delta := \min\{\bar{\varepsilon}_\delta, \tilde{\varepsilon}_\delta\}$. Devemos provar o Teorema para essa escolha de ε_δ . Seja $0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta$ fixado. Aplicando o Teorema 1.5.1, obtemos $\text{cat}_{\Pi_\delta}(\Pi)$ soluções não-triviais do problema $(P_{\varepsilon, A})$. Se $u \in H_\varepsilon$ é uma dessas soluções, temos que $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon$, e portanto podemos usar (1.76) e a definição g para concluir $g(\varepsilon x, u) \equiv f(u)$. Assim, u também é uma solução do problema (\tilde{P}_ε) . Um cálculo direto mostra que $\hat{u}(x) := u(x/\varepsilon)$ é uma solução do problema original (P_ε) . Então, (P_ε) tem pelo menos $\text{cat}_{\Pi_\delta}(\Pi)$ soluções não-triviais.

Agora, consideremos $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ e tomemos uma sequência $u_n \in H_{\varepsilon_n}$ de soluções do problema $(\tilde{P}_{\varepsilon_n})$ como anteriormente. Para estudar o comportamento dos pontos de máximo de u_n , primeiramente notamos que, por (g_1) , existe $\gamma > 0$ tal que

$$g(\varepsilon x, s) \leq \frac{V_0}{k} s^2, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^3, s \leq \gamma. \quad (1.78)$$

Aplicando o Lema 1.6.1 obtemos $R > 0$ e $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^3$ tais que

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(\tilde{y}_n))^c} < \gamma, \quad (1.79)$$

A menos de subsequência, podemos também assumir que

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(\tilde{y}_n))} \geq \gamma. \quad (1.80)$$

Com efeito, se este não é o caso, temos que $|u_n|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \gamma$, e portanto segue-se de $J'_{\varepsilon_n}(u_n) = 0$ e (1.78) que

$$m_0 \|u_n\|_{\varepsilon_n}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} g(\varepsilon_n x, u_n) u_n \leq \frac{V_0}{k} \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2.$$

A última desigualdade implica que $\|u_n\|_{\varepsilon_n} = 0$, o que não faz sentido. Assim, (1.80) ocorre.

Usando (1.79) e (1.80) concluímos que o ponto de máximo $p_n \in \mathbb{R}^3$ de u_n pertence a $B_R(\tilde{y}_n)$. Assim $p_n = \tilde{y}_n + q_n$, para algum $q_n \in B_R(0)$. Recordando que a solução associada de (P_{ε_n}) é da forma $\hat{u}_n(x) = u_n(x/\varepsilon_n)$, concluímos que o ponto de máximo η_n de \hat{u}_n é $\eta_n := \varepsilon_n \tilde{y}_n + \varepsilon_n q_n$. Desde que $(q_n) \subset B_R(0)$ é limitada e $\varepsilon_n \tilde{y}_n \rightarrow y_0 \in \Pi$ (de acordo com a Proposição 1.5.1), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\eta_n) = V(y_0) = V_0,$$

concluindo a prova do teorema. ■

Capítulo 2

Domínio expandido

2.1 Introdução

Neste capítulo estamos interessados em investigar a existência de múltiplas soluções do problema

$$(P_{\Omega_\lambda}) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u = f(u), \Omega_\lambda \\ u \in H_0^1(\Omega_\lambda), \end{cases}$$

onde $\Omega_\lambda = \lambda\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado, λ é um parâmetro positivo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função apenas contínua e \mathcal{L} é um operador não-local definido por

$$\mathcal{L}u = M \left(\int_{\Omega_\lambda} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_\lambda} u^2 dx \right) [-\Delta u + u].$$

Ao longo deste capítulo, $M : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função contínua satisfazendo as hipóteses (M_1) , enunciada na introdução do capítulo anterior e as hipóteses (M'_2) e (M''_2) , introduzidas na Observação 1.3.2 .

Por outro lado, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, se anula em $(-\infty, 0]$ e satisfaz as hipóteses $(f_1) - (f_4)$, já introduzidas no capítulo 1, e

(f_5) f é uma função localmente Lipschitz-contínua em $(0, +\infty)$.

Remetemos ao apêndice A os leitores interessados em maiores detalhes a respeito de (M'_2) e (M''_2) .

Como veremos na seção 2.2, a escolha do problema (P_{Ω_λ}) para o segundo capítulo desta tese é uma “eleição natural”, no sentido de que, para atacar (P_{Ω_λ})

é importante estudarmos a existência de solução ground-state do problema limite associado ($\lambda = \infty$), o que, afortunadamente, já foi feito no primeiro capítulo.

O principal resultado deste capítulo é:

Teorema 2.1.1 *Se a aplicação M satisfaz (M_1) , (M'_2) e (M''_2) e a aplicação f satisfaz $(f_1) - (f_5)$ então existe $\lambda_* > 0$ tal que o problema (P_{Ω_λ}) admite ao menos $\text{cat}\Omega$ soluções positivas, para todo $\lambda \in [\lambda_*, \infty)$. Além disso, se $\bar{\Omega}$ não é contrátil então (P_{Ω_λ}) admite ao menos $1 + \text{cat}\Omega$ soluções positivas.*

Sendo assim o capítulo 2 está dividido da seguinte forma: Na seção 2.2 fixamos algumas notações referentes ao problema limite, na seção 2.3 introduzimos a estrutura variacional de (P_{Ω_λ}) , na seção 2.4 enunciamos resultados que contornam a não-diferenciabilidade, na seção 2.5 obtemos uma solução ground-state positiva para (P_{Ω_λ}) , na seção 2.6 estudamos o comportamento de alguns níveis minimax para valores grandes de λ , finalmente, na seção 2.7 relacionamos o número de soluções de (P_{Ω_λ}) com a topologia do conjunto Ω_λ .

2.2 O problema limite

Como já mencionado, é importante obter informações sobre a existência de solução ground-state para o problema limite associado a (P_{Ω_λ}) . Entretanto, uma vez que os resultados importantes para nossos propósitos a respeito do problema limite já foram obtidos no capítulo 1, nos limitaremos aqui a fixar algumas notações.

Consideremos o problema limite

$$(P_1) \quad \begin{cases} \mathfrak{L}_1 u = f(u), \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

onde \mathfrak{L}_1 é o operador obtido quando se escolhe $\mu = 1$ no operador \mathfrak{L}_μ introduzido no problema (P_μ) do capítulo 1, isto é,

$$\mathfrak{L}_1 u = M \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx \right) [-\Delta u + u].$$

O funcional energia associado a (P_1) é dado por

$$I_1(u) = \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|^2) - \int_{\mathbb{R}^3} F(u),$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds$ e $F(t) = \int_0^t f(s)ds$. De (f_1) e (f_2) , o funcional I_1 está bem definido sobre o espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^3)$, munido do produto interno

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v + \int_{\mathbb{R}^3} uv,$$

e da norma proveniente $\|\cdot\|$.

Recordamos que, sendo M e f contínuas, o funcional I_1 é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$ e

$$I_1'(u)v = M(\|u\|^2)(u, v) - \int_{\mathbb{R}^3} f(u)v, \quad \forall u, v \in H^1(\mathbb{R}^3).$$

Denotamos a variedade de Nehari associada a I_1 por

$$\mathcal{N}_1 = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\} : I_1'(u)u = 0\}.$$

Denotamos por $H^{1,+}(\mathbb{R}^3)$ o subconjunto aberto de $H^1(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$H^{1,+}(\mathbb{R}^3) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3) : u^+ \neq 0\},$$

e $S_1^+ = S_1 \cap H^{1,+}(\mathbb{R}^3)$, onde S_1 é a esfera unitária de $H^1(\mathbb{R}^3)$.

O nível minimax associado a I_1 é denotado por c_1 .

2.3 Estrutura variacional

O funcional energia $E_\lambda : H_0^1(\Omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{R}$ associado a (P_{Ω_λ}) é definido por

$$E_\lambda(u) = \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|_\lambda^2) - \int_{\Omega_\lambda} F(u),$$

onde

$$\|u\|_\lambda^2 := \int_{\Omega_\lambda} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega_\lambda} u^2$$

define a norma em $H_0^1(\Omega_\lambda)$ proveniente do produto interno

$$(u, v)_\lambda = \int_{\Omega_\lambda} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega_\lambda} uv.$$

Sendo M e f funções contínuas, temos que $E_\lambda \in C^1(H_0^1(\Omega_\lambda), \mathbb{R})$ e

$$E_\lambda'(u)v = M(\|u\|_\lambda^2)(u, v)_\lambda - \int_{\Omega_\lambda} f(u)v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\lambda).$$

Definimos a variedade de Nehari associada ao funcional E_λ por

$$\mathcal{M}_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega_\lambda) \setminus \{0\} : E'_\lambda(u)u = 0\}.$$

Novamente, devido a regularidade de E_λ não sabemos sequer se \mathcal{M}_λ é uma variedade contínua.

Denotamos por $H_0^{1,+}(\Omega_\lambda)$ o subconjunto aberto de $H_0^1(\Omega_\lambda)$ dado por

$$H_0^{1,+}(\Omega_\lambda) = \{u \in H_0^1(\Omega_\lambda) : u^+ \neq 0\},$$

e $S_\lambda^+ = S_\lambda \cap H_0^{1,+}(\Omega_\lambda)$, onde S_λ é a esfera unitária de $H_0^1(\Omega_\lambda)$.

Como no capítulo 1, S_λ^+ é uma $C^{1,1}$ -subvariedade de $H_0^{1,+}(\Omega_\lambda)$ e portanto, para cada $u \in S_\lambda^+$, temos que $H_0^1(\Omega_\lambda) = T_u S_\lambda^+ \oplus \mathbb{R}u$.

Quando $\Omega = B_R(0)$ para algum $R > 0$, temos $\Omega_\lambda = B_{\lambda R}(0)$. Neste caso, denotaremos o problema (P_{Ω_λ}) por $(P_{B_{\lambda R}})$, o funcional E_λ por $E_{\lambda,R}$ e a variedade de Nehari \mathcal{M}_λ por $\mathcal{M}_{\lambda,R}$.

2.4 Resultados preliminares

Levando em consideração a Observação 1.3.2, podemos argumentar, respectivamente, como nas demonstrações dos Lema 1.3.2, Proposição 1.3.1 e Lema 1.3.3, para demonstrar os próximos três resultados.

Lema 2.4.1 *Suponha que a função M satisfaz (M_1) , (M'_2) e (M''_2) e a função f satisfaz $(f_1) - (f_4)$. Então:*

(A₁) *Para cada $u \in H_0^{1,+}(\Omega_\lambda)$, definimos $h_u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ por $h_u(t) = E_\lambda(tu)$. Então, existe um único $t_u > 0$ tal que $h'_u(t) > 0$ em $(0, t_u)$ e $h'_u(t) < 0$ em (t_u, ∞) .*

(A₂) *Existe $\tau > 0$, independente de u , tal que $t_u \geq \tau$ para todo $u \in S_\lambda^+$. Além disso, para cada conjunto compacto $\mathcal{W} \subset S_\lambda^+$ existe $C_{\mathcal{W}} > 0$ tal que $t_u \leq C_{\mathcal{W}}$, para todo $u \in \mathcal{W}$.*

(A₃) *A aplicação $\hat{m}_\lambda : H_0^{1,+}(\Omega_\lambda) \rightarrow \mathcal{M}_\lambda$, definida por $\hat{m}_\lambda(u) = t_u u$, é contínua. A aplicação $m_\lambda : S_\lambda^+ \rightarrow \mathcal{M}_\lambda$, definida por $m_\lambda = (\hat{m}_\lambda)|_{S_\lambda^+}$, é*

um homeomorfismo entre S_λ^+ e \mathcal{M}_λ . Além disso, a inversa de m_λ é dada por $m_\lambda^{-1}(u) = u/\|u\|_\lambda$.

(A₄) Se $\text{dist}(u_n, \partial S_\lambda^+) \rightarrow 0$, para alguma sequência $\{u_n\} \subset S_\lambda^+$, então

$$\|m_\lambda(u_n)\|_\lambda \rightarrow \infty \text{ e } E_\mu(m_\lambda(u_n)) \rightarrow \infty.$$

Definamos as aplicações

$$\widehat{\Psi}_\lambda : H_0^{1,+}(\Omega_\lambda) \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } \Psi_\lambda : S_\lambda^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

por $\widehat{\Psi}_\lambda(u) = I_\lambda(\widehat{m}_\lambda(u))$ e $\Psi_\lambda := (\widehat{\Psi}_\lambda)|_{S_\lambda^+}$.

Proposição 2.4.1 *Sob as hipóteses do Lema 2.4.1,*

(a) $\widehat{\Psi}_\lambda \in C^1(H_0^{1,+}(\Omega_\lambda), \mathbb{R})$ e

$$\widehat{\Psi}'_\lambda(u)v = \frac{\|\widehat{m}_\lambda(u)\|_\lambda}{\|u\|_\lambda} E'_\lambda(\widehat{m}_\lambda(u))v, \quad \forall u \in H_0^{1,+}(\Omega_\lambda) \text{ e } \forall v \in H_0^1(\Omega_\lambda).$$

(b) $\Psi_\lambda \in C^1(S_\lambda^+, \mathbb{R})$ e

$$\Psi'_\lambda(u)v = \|m(u)\|_\lambda E'_\lambda(m_\lambda(u))v, \quad \forall u \in S_\lambda^+ \text{ e } \forall v \in T_u S_\lambda^+.$$

(c) Se $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_d$ para Ψ_λ então $\{m_\lambda(u_n)\}$ é uma sequência $(PS)_d$ para E_λ . Se $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\lambda$ é uma sequência $(PS)_d$ limitada para E_λ então $\{m_\lambda^{-1}(u_n)\}$ é uma sequência $(PS)_d$ para Ψ_λ .

(d) u é um ponto crítico de Ψ_λ se, e somente se, $m_\lambda(u)$ é um ponto crítico não-trivial de E_λ . Além disso, os valores críticos correspondentes coincidem e

$$\inf_{S_\lambda^+} \Psi_\lambda = \inf_{\mathcal{M}_\lambda} E_\lambda.$$

Lema 2.4.2

$$c(\lambda) = \inf_{u \in \mathcal{M}_\lambda} E_\lambda(u) = \inf_{u \in H_0^{1,+}(\Omega_\lambda)} \max_{t>0} E_\lambda(tu) = \inf_{u \in S_\lambda^+} \max_{t>0} E_\lambda(tu).$$

Observação 2.4.1 *Quando $\Omega = B_R(0)$, denotaremos $c(\lambda)$ por $c(\lambda, R)$, m_λ por $m_{\lambda,R}$, Ψ_λ por $\Psi_{\lambda,R}$ e S_λ^+ por $S_{\lambda,R}^+$.*

2.5 Existência de solução ground-state

Lema 2.5.1 *O funcional E_λ verifica a condição $(PS)_d$ para todo $d \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega_\lambda)$ uma sequência Palais-Smale no nível d para o funcional E_λ , isto é,

$$E_\lambda(u_n) \rightarrow d \text{ e } E'_\lambda(u_n) \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Usando (M'_2) , (f_4) e argumentando como na demonstração do Lema 1.4.4, concluímos que $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega_\lambda)$.

Desde que $H_0^1(\Omega_\lambda)$ é um espaço de Hilbert e Ω_λ é um domínio limitado, segue que existe $u \in H_0^1(\Omega_\lambda)$ tal que, a menos de subsequência, teremos

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega_\lambda), \quad (2.1)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^s(\Omega_\lambda), 1 \leq s < 6 \quad (2.2)$$

e

$$\|u_n\|_\lambda \rightarrow t_0, \quad (2.3)$$

para algum $t_0 \geq 0$.

Sendo $\{u_n\}$ uma sequência Palais-Smale limitada, temos que

$$E'_\lambda(u_n)(u_n - u) = o_n(1). \quad (2.4)$$

Por outro lado,

$$E'_\lambda(u_n)(u_n - u) = M(\|u_n\|_\lambda^2) \left[\int_{\Omega_\lambda} \nabla u_n \nabla (u_n - u) + \int_{\Omega_\lambda} u_n (u_n - u) \right] + \int_{\Omega_\lambda} f(u_n)(u - u_n).$$

Uma vez que f tem crescimento subcrítico, segue-se de (2.1), (2.2) e (2.3) que

$$E'_\lambda(u_n)(u_n - u) = M(t_0^2) [t_0^2 - \|u\|_\lambda^2] + o_n(1). \quad (2.5)$$

Comparando (2.4) e (2.5) concluímos que $t_0 = \|u\|_\lambda$ e sendo $H_0^1(\Omega_\lambda)$ Hilbert, obtemos $u_n \rightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$. ■

Corolário 2.5.1 *O funcional Ψ_λ verifica a condição $(PS)_d$ sobre S_λ^+ , para todo $d \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Basta usar o Lema 2.4.1, a Proposição 2.4.1 e o Lema 2.5.1. ■

Teorema 2.5.1 *Suponha que a função M satisfaz (M_1) , (M'_2) e (M''_2) e a função f satisfaz $(f_1) - (f_4)$. Então, o problema (P_{Ω_λ}) tem uma solução ground-state positiva de classe $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_\lambda)$, para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: A existência segue dos Lemas 2.4.1, 2.4.2, 2.5.1 e de [[76], Theorem 1.17]. A regularidade e a positividade seguem de argumentos análogos aos da demonstração do Teorema 1.3.1. ■

2.6 Comportamento dos níveis minimax

Nesta seção estudaremos como se comportam os níveis minimax com relação ao parâmetro λ . Antes, introduziremos algumas notações que se fazem necessárias.

Para cada $x \in \mathbb{R}^3$ e $R > r > 0$, denotamos por $A_{R,r,x}$ o conjunto

$$A_{R,r,x} = B_R(x) \setminus \overline{B}_r(x).$$

Quando $x = 0$ denotamos o conjunto $A_{R,r,0}$ por $A_{R,r}$.

Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ com suporte compacto, definimos

$$\beta_\lambda(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} x |\nabla u|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx}.$$

Além disso, para cada $x \in \mathbb{R}^3$, denotamos por $a(R, r, \lambda, x)$ o número real

$$a(R, r, \lambda, x) = \inf_{u \in \mathcal{A}_{\lambda,x}} \widehat{E}_{\lambda,x}(u),$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\lambda,x} &= \{u : \beta_\lambda(u) = x \text{ e } u \in \widehat{\mathcal{M}}_{\lambda,x}\}, \\ \widehat{E}_{\lambda,x}(u) &= \frac{1}{2} \widehat{M} \left(\int_{A_{\lambda R, \lambda r, x}} |\nabla u|^2 dx + \int_{A_{\lambda R, \lambda r, x}} u^2 dx \right) - \int_{A_{\lambda R, \lambda r, x}} F(u) dx, \end{aligned}$$

e

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\lambda,x} = \{u \in H_0^1(A_{\lambda R, \lambda r, x}) \setminus \{0\} : \widehat{E}'_{\lambda,x}(u)u = 0\}.$$

Finalmente, denotamos o número $a(R, r, \lambda, 0)$ por $a(R, r, \lambda)$, o funcional $\widehat{E}_{\lambda,0}$ por \widehat{E}_λ e o conjunto $\widehat{\mathcal{M}}_{\lambda,0}$ por $\widehat{\mathcal{M}}_\lambda$.

O próximo resultado será usado na demonstração da Proposição 2.7.1.

Proposição 2.6.1 *O número $a(R, r, \lambda)$ satisfaz*

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} a(R, r, \lambda) > c_1.$$

Demonstração: Observemos que dado $u \in \widehat{\mathcal{M}}_\lambda$, a extensão \tilde{u} de u , definida por

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in A_{\lambda R, \lambda r}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^3 \setminus A_{\lambda R, \lambda r}, \end{cases}$$

está em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \tilde{u}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{u}^2 dx = \int_{A_{\lambda R, \lambda r}} |\nabla u|^2 dx + \int_{A_{\lambda R, \lambda r}} u^2 dx.$$

Logo, $I_1(\tilde{u}) = \widehat{E}_\lambda(u)$ e $I'_1(\tilde{u})\tilde{u} = \widehat{E}'_\lambda(u)u = 0$. Assim, por abuso de notação podemos identificar u e \tilde{u} . Desta forma, temos $\mathcal{A}_\lambda \subset \mathcal{N}_1$ e portanto

$$a(R, r, \lambda) = \inf_{u \in \mathcal{A}_\lambda} \widehat{E}_\lambda(u) \geq \inf_{u \in \mathcal{N}_1} I_1(u) = c_1.$$

Mostrando que

$$a(R, r, \lambda) \geq c_1, \forall \lambda > 0. \quad (2.6)$$

Suponhamos por contradição que

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} a(R, r, \lambda) = c_1.$$

De (2.6), existe $\Lambda > 0$ tal que, para cada $\bar{\lambda} > \Lambda$, temos

$$\inf_{\lambda \geq \bar{\lambda}} a(R, r, \lambda) = c_1.$$

Da definição de ínfimo, existe $\{\lambda_n\} \subset (0, \infty)$ tal que

$$\lambda_n \rightarrow \infty \text{ e } a(R, r, \lambda_n) \rightarrow c_1.$$

Da definição de $a(R, r, \lambda_n)$, obtemos uma sequência $\{u_n\} \subset \widehat{\mathcal{M}}_{\lambda_n}$, verificando

$$\beta_\lambda(u_n) = 0 \text{ e } \widehat{E}_{\lambda_n}(u_n) \rightarrow c_1.$$

Logo, $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_1$ e $I_1(u_n) \rightarrow c_1$.

Do Lema 1.3.5 com $\mu = 1$, temos que

$$u_n(x) = w_n(x) + \Psi(x - y_n), \quad (2.7)$$

onde $\{w_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ com

$$w_n \rightarrow 0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^3), \quad (2.8)$$

$\{y_n\} \subset \mathbb{R}^3$ é tal que $|y_n| \rightarrow \infty$ (ver comentário imediatamente após o Lema 1.3.4) e $\Psi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\Psi > 0$ satisfaz

$$I_1(\Psi) = c_1 \text{ e } I_1'(\Psi)\Psi = 0.$$

Uma vez que \widehat{E}_λ é invariante por rotações, podemos assumir que $y_n = (y_n^1, 0, 0)$ e que $y_n^1 < 0$.

Definamos

$$\alpha := \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \Psi|^2 dx > 0.$$

Desenvolvendo o produto interno, obtemos

$$\int_{B_{\frac{r\lambda_n}{2}}(y_n)} |\nabla(w_n + \Psi(\cdot - y_n))|^2 = \int_{B_{\frac{r\lambda_n}{2}}(y_n)} |\nabla w_n|^2 + 2 \int_{B_{\frac{r\lambda_n}{2}}(y_n)} \nabla w_n \nabla \psi(\cdot - y_n) + \alpha + o_n(1).$$

Concluimos de (2.8) e do Teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_{B_{\frac{r\lambda_n}{2}}(y_n)} |\nabla u_n|^2 dx \rightarrow \alpha. \quad (2.9)$$

Definindo $\Theta_n = B_{\frac{r\lambda_n}{2}}(y_n) \cap [B_{R\lambda_n}(0) \setminus B_{r\lambda_n}(0)]$, resulta de (2.9) que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\Theta_n| > 0$ para todo $n \geq n_0$. Por outro lado, de (2.7) e (2.8), obtemos

$$\int_{B_{R\lambda_n}(0) \setminus B_{r\lambda_n}(0)} |\nabla u_n|^2 dx \rightarrow \alpha. \quad (2.10)$$

De (2.9) e (2.10), resulta que

$$\int_{\Theta_n} |\nabla u_n|^2 dx \rightarrow \alpha.$$

Portanto, definindo $\Upsilon_n = [B_{R\lambda_n}(0) \setminus B_{r\lambda_n}(0)] \setminus B_{\frac{r\lambda_n}{2}}(y_n)$, concluimos que

$$\int_{\Upsilon_n} |\nabla u_n|^2 dx \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Uma vez que $\beta_\lambda(u_n) = 0$, teremos

$$0 = \int_{A_{\lambda_n R, \lambda_n r}} x_1 |\nabla u_n|^2 = \int_{\Theta_n} x_1 |\nabla u_n|^2 + \int_{\Upsilon_n} x_1 |\nabla u_n|^2.$$

Assim,

$$0 \leq -\left(\frac{r\lambda_n}{2}\right)(\alpha + o_n(1)) + R\lambda_n \int_{\Upsilon_n} |\nabla u_n|^2,$$

e conseqüentemente,

$$\int_{\Upsilon_n} |\nabla u_n|^2 \geq \frac{rM}{2R} + o_n(1),$$

contradizendo (2.11). A prova está completa. ■

Proposição 2.6.2 *O nível $c(\lambda)$ verifica*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c(\lambda) = c_1.$$

Demonstração: Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $\varphi = 1$ em $B_1(0)$, $\varphi = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus B_2(0)$ e $0 \leq \varphi \leq 1$. Para cada $R > 0$, definimos

$$\varphi_R(x) = \varphi\left(\frac{x}{R}\right) \text{ e } w_R(x) = \varphi_R(x)w(x),$$

onde w é uma solução ground-state positiva de (P_1) .

Uma vez que $0 \in \Omega$, existe $\lambda^* = \lambda^*(R) > 0$ tal que

$$B_{2R}(0) \subset \Omega_\lambda, \quad \forall \lambda \geq \lambda^*.$$

Do Lema 2.4.1(A_1), existe um único $t_R > 0$ tal que $t_R w_R \in \mathcal{M}_\lambda$. Observe que, sendo w_R de suporte compacto, t_R é o mesmo para todo $\lambda \geq \lambda^*$. Então,

$$c(\lambda) \leq I_1(t_R w_R), \quad \lambda \geq \lambda^*.$$

Sendo assim,

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} c(\lambda) \leq I_1(t_R w_R). \quad (2.12)$$

Mostraremos agora que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} t_R = 1. \quad (2.13)$$

De fato, como $t_R w_R \in \mathcal{M}_\lambda$, obtemos

$$M(t_R^2 \|w_R\|_\lambda^2) \|w_R\|_\lambda^2 = \int_{\Omega_\lambda} \frac{f(t_R w_R)}{t_R} w_R.$$

Como $\|w_R\|_\lambda^2 = \|w_R\|^2$, temos

$$\frac{M(t_R^2 \|w_R\|^2)}{t_R^2 \|w_R\|^2} = \frac{1}{\|w_R\|^4} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{f(t_R w_R)}{(t_R w_R)^3} \right] w_R^4. \quad (2.14)$$

Considerando $R > 1$ e usando (f_3) e (f_4) , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{M(t_R^2 \|w_R\|^2)}{t_R^2 \|w_R\|^2} &\geq \frac{1}{\|w_R\|^4} \int_{B_1(0)} \left[\frac{f(t_R w_R)}{(t_R w_R)^3} \right] w_R^4 \\ &\geq \frac{1}{\|w_R\|^4} \int_{B_1(0)} \left[\frac{f(t_R a)}{(t_R a)^3} \right] a^4, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $a = \min_{|x| \leq 1} w(x)$.

Suponha que existe uma seqüência $\{R_n\} \subset (0, \infty)$ tal que $R_n \rightarrow \infty$ e $t_{R_n} \rightarrow \infty$. De (2.15), temos

$$\frac{M(t_{R_n}^2 \|w_{R_n}\|^2)}{t_{R_n}^2 \|w_{R_n}\|^2} \geq \frac{1}{\|w_{R_n}\|^4} \int_{B_1(0)} \left[\frac{f(t_{R_n} a)}{(t_{R_n} a)^3} \right] a^4.$$

Segue de (f_3) e do Lema de Fatou, que

$$\frac{M(t_{R_n}^2 \|w_{R_n}\|^2)}{t_{R_n}^2 \|w_{R_n}\|^2} \rightarrow \infty, \quad (2.16)$$

pois, devido ao Teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\|w_{R_n}\|^2 \rightarrow \|w\|^2 > 0.$$

Porém, a convergência em (2.16) contradiz a hipótese (M_2'') . Logo, a aplicação $R \mapsto t_R$ é limitada.

Suponha que existe $\{R_n\} \subset (0, \infty)$ tal que $R_n \rightarrow \infty$ e $t_{R_n} \rightarrow 0$. Segue-se de (f_1) e (f_2) que

$$\frac{f(t_{R_n} w_{R_n})}{(t_{R_n} w_{R_n})^3} \leq \frac{\xi (t_{R_n} w_{R_n})^3 + C_\xi (t_{R_n} w_{R_n})^{q-1}}{(t_{R_n} w_{R_n})^3},$$

e portanto

$$\left[\frac{f(t_{R_n} w_{R_n})}{(t_{R_n} w_{R_n})^3} \right] w_{R_n}^4 \leq \xi w_{R_n}^4 + C_\xi t_{R_n}^{q-4} w_{R_n}^q.$$

Como $w_{R_n} \rightarrow w$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, resulta das imersões contínuas de Sobolev que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{f(t_{R_n} w_{R_n})}{(t_{R_n} w_{R_n})^3} \right] w_{R_n}^4 \leq C_1 \xi + C_2 t_{R_n}^{q-4}.$$

Sendo $q > 4$, obtemos

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{f(t_{R_n} w_{R_n})}{(t_{R_n} w_{R_n})^3} \right] w_{R_n}^4 \leq C_1 \xi, \quad \forall \xi > 0.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{f(t_{R_n} w_{R_n})}{(t_{R_n} w_{R_n})^3} \right] w_{R_n}^4 = 0.$$

Passando ao limite de $n \rightarrow \infty$ em (2.14), obtemos

$$\frac{M(t_{R_n}^2 \|w_{R_n}\|^2)}{t_{R_n}^2 \|w_{R_n}\|^2} \rightarrow 0.$$

Contradizendo a hipótese (M'_2) .

Portanto, existem $R_0, \delta > 0$ tais que $t_R \geq \delta$ para todo $R \geq R_0$ e, considerando $\{R_n\} \subset (0, \infty)$ com $R_n \rightarrow \infty$, existe $t_0 \geq \delta > 0$ tal que $t_{R_n} \rightarrow t_0$.

De (2.14), obtemos

$$\frac{M(t_0^2 \|w\|^2)}{t_0^2 \|w\|^2} = \frac{1}{\|w\|^4} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{f(t_0 w)}{(t_0 w)^3} \right] w^4. \quad (2.17)$$

Porém, de acordo com Lema 1.3.2(A_1), existe um único real positivo satisfazendo a igualdade em (2.17). Uma vez que w é solução de (P_1) temos que 1 também satisfaz a igualdade em (2.17), logo $t_0 = 1$ e $I_1(t_R w_R) \rightarrow I_1(w) = c_1$ quando $R \rightarrow \infty$.

Assim, de (2.12), concluímos que

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} c(\lambda) \leq c_1. \quad (2.18)$$

Por outro lado, sendo $u \in H_0^1(\Omega_\lambda)$, temos que $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^3)$, onde

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega_\lambda, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\lambda. \end{cases}$$

Daí, $E_\lambda(tu) = I_1(t\tilde{u})$, para todos $u \in H_0^1(\Omega_\lambda)$ e $t \geq 0$.

Isso nos permite concluir que

$$c(\lambda) = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega_\lambda) \\ u \neq 0}} \max_{t \geq 0} E_\lambda(tu) \geq \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^3) \\ u \neq 0}} \max_{t \geq 0} I_1(tu) = c_1.$$

Portanto,

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} c(\lambda) \geq c_1. \quad (2.19)$$

De (2.18) e (2.19) concluímos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c(\lambda) = c_1.$$

■

2.7 Multiplicidade de Soluções

Fixaremos agora $r > 0$ suficientemente pequeno de modo que os conjuntos

$$\Omega^- = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\}$$

e

$$\Omega^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, \Omega) \leq r\}$$

sejam homotopicamente equivalentes.

Definimos os conjuntos E_λ^c e Ψ_λ^c por

$$E_\lambda^c = \{u \in \mathcal{M}_\lambda : E_\lambda(u) \leq c\}$$

e

$$\Psi_\lambda^c = \{u \in S_\lambda^+ : \Psi_\lambda(u) \leq c\}.$$

Lema 2.7.1 *Os conjuntos $E_\lambda^{c(\lambda,r)}$ e $\Psi_\lambda^{c(\lambda,r)}$ são fechados em $H_0^1(\Omega_\lambda)$ e não-vazios.*

Demonstração: De fato, basta notar que tais conjuntos são homeomorfos e $E_\lambda^{c(\lambda,r)}$ é fechado, pois E_λ é contínuo e \mathcal{M}_λ é fechado.

Para mostrar que $E_\lambda^{c(\lambda,r)}$ e $\Psi_\lambda^{c(\lambda,r)}$ são não-vazios, seja $u_{\lambda,r}$ uma solução ground-state positiva para $(P_{B_{\lambda r}})$. Tal solução pode ser considerada radialmente simétrica em relação a origem devido a (f_5) , ver [30].

Consideremos aplicação $\Phi_r : \lambda\Omega_- \rightarrow H_0^1(\Omega_\lambda)$ definida por

$$\Phi_{r,y}(x) = \begin{cases} u_{\lambda,r}(|x-y|), & x \in B_{\lambda r}(y) \\ 0, & x \in \Omega_\lambda \setminus B_{\lambda r}(y) \end{cases}$$

Para cada $y \in \lambda\Omega_-$, temos que $\Phi_{r,y} \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Além disso, como $u_{\lambda,r} \in \mathcal{M}_{\lambda,r}$, resulta que $\Phi_{r,y} \in \mathcal{M}_\lambda$ e $E_\lambda(\Phi_{r,y}) = c(\lambda, r)$, para todo $y \in \lambda\Omega_-$. ■

Note que Φ_r é uma aplicação contínua, pois

$$\Phi_{r,y} = \widetilde{\mathcal{T}_y u_{\lambda,r}} = \mathcal{T}_y \widetilde{u_{\lambda,r}}$$

e a aplicação translação de y , denotada por $\mathcal{T}_y : \lambda\Omega_- \rightarrow H_0^1(\Omega_\lambda)$, é contínua.

Finalmente, observamos que para cada $y \in \lambda\Omega_-$, temos $\beta_\lambda(\Phi_{r,y}) = y$.

Proposição 2.7.1 *Existe $\lambda_* > 0$ tal que se $\lambda \in [\lambda_*, \infty)$ e $u \in E_\lambda^{c(r,\lambda)}$, então $\beta_\lambda(u) \in \lambda\Omega^+$.*

Demonstração: Suponhamos por contradição que o resultado não seja verdadeiro. Então, existem $\{\lambda_n\} \subset (0, \infty)$ com $\lambda_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e uma sequência $\{u_n\}$ tal que, $u_n \in \mathcal{M}_{\lambda_n}$, $E_{\lambda_n}(u_n) \leq c(r, \lambda_n)$, e

$$x_n = \beta_{\lambda_n}(u_n) \notin \lambda_n\Omega^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

Para cada $y = \lambda_n x$, com $x \in \Omega$, temos que

$$\begin{aligned} \lambda_n r &< |y - x_n| \\ &= |\lambda_n x - \beta_{\lambda_n}(u_n)| \\ &= \left| \frac{\int_{\mathbb{R}^3} (\lambda_n x - z) |\nabla u_n|^2 dz}{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 dz} \right|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lambda_n r < |y - x_n| = \lambda_n \left| \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \left(x - \frac{1}{\lambda_n} z\right) |\nabla u_n|^2 dz}{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 dz} \right|.$$

Uma vez que $|x - (1/\lambda_n)z| \leq \text{diam}\Omega$, obtemos

$$\lambda_n r < |y - x_n| \leq \lambda_n \text{diam}\Omega.$$

Assim, para garantir que

$$\Omega_{\lambda_n} \subset A_{\lambda_n R, \lambda_n r, x_n},$$

é suficiente tomarmos $R > \text{diam}\Omega$. Neste caso, teremos

$$a(R, r, \lambda_n, x_n) \leq \inf_{u \in \widehat{\mathcal{M}}_{\lambda_n, x_n}} E_{\lambda_n}(u) \leq E_{\lambda_n}(u_n) \leq c(\lambda_n, r).$$

Desde que $\widehat{E}_{\lambda_n, x_n}(u) = \widehat{E}_{\lambda_n}(u)$, obtemos $a(R, r, \lambda_n, x_n) = a(R, r, \lambda_n)$, e assim

$$a(R, r, \lambda_n) \leq c(\lambda_n, r). \quad (2.21)$$

Passando ao limite inferior de $n \rightarrow \infty$ em (2.21) e usando a Proposição 2.6.2, concluímos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a(R, r, \lambda_n) \leq c_1,$$

contradizendo a Proposição 2.6.1. A prova está completa. ■

Proposição 2.7.2 *Para cada $\lambda \in [\lambda_*, \infty)$, temos que*

$$\text{cat}_{\Psi_\lambda^{c(\lambda, r)}} (m_\lambda^{-1}(\Phi_r(\lambda\Omega_-))) = \text{cat}_{E_\lambda^{c(\lambda, r)}} (\Phi_r(\lambda\Omega_-)) \geq \text{cat}\Omega.$$

Demonstração: Dividiremos a demonstração em duas afirmações.

Afirmção 2.7.1

$$\text{cat}_{\Psi_\lambda^{c(\lambda, r)}} (m_\lambda^{-1}(\Phi_r(\lambda\Omega_-))) = \text{cat}_{E_\lambda^{c(\lambda, r)}} (\Phi_r(\lambda\Omega_-)).$$

Prova da Afirmação 2.7.1:

Suponhamos que $\text{cat}_{E_\lambda^{c(\lambda,r)}}(\Phi_r(\lambda\Omega_-)) = k$. Sendo assim, existem k subconjuntos $A_j \subset E_\lambda^{c(\lambda,r)} \subset \mathcal{M}_\lambda$, fechados e contráteis em $E_\lambda^{c(\lambda,r)}$, tais que

$$\Phi_r(\lambda\Omega_-) = \bigcup_{j=1}^k A_j.$$

Sendo $m_\lambda : S_\lambda^+ \rightarrow \mathcal{M}_\lambda$ um homeomorfismo, os subconjuntos $B_j = m_\lambda^{-1}(A_j) \subset \Psi_\lambda^{c(\lambda,r)} \subset S_\lambda^+$ são fechados e não-vazios para cada $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ e

$$m_\lambda^{-1}(\Phi_r(\lambda\Omega_-)) = \bigcup_{j=1}^k B_j.$$

Vejam os conjuntos B_j são todos contráteis em $\Psi_\lambda^{c(\lambda,r)}$. Ora, sendo A_j contrátil em $E_\lambda^{c(\lambda,r)}$, existem uma deformação $g_j \in C([0, 1] \times A_j, E_\lambda^{c(\lambda,r)})$ e uma função $w_j \in E_\lambda^{c(\lambda,r)}$ tais que

$$g_j(0, u) = u \text{ e } g_j(1, u) = w_j, \quad \forall u \in A_j. \quad (2.22)$$

Definamos a aplicação $h_j \in C([0, 1] \times B_j, \Psi_\lambda^{c(\lambda,r)})$ por

$$h_j(t, u) = m_\lambda^{-1}(g_j(t, m_\lambda(u))), \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall u \in B_j.$$

Segue de (2.22) que

$$h_j(0, u) = u \text{ e } h_j(1, u) = m_\lambda^{-1}(w_j), \quad \forall u \in B_j. \quad (2.23)$$

Portanto $\text{cat}_{\Psi_\lambda^{c(\lambda,r)}}(m_\lambda^{-1}(\Phi_r(\lambda\Omega_-))) \leq k$.

Usando o mesmo raciocínio vemos que $k \leq \text{cat}_{\Psi_\lambda^{c(\lambda,r)}}(m_\lambda^{-1}(\Phi_r(\lambda\Omega_-)))$, o que prova a afirmação. \square

Afirmação 2.7.2 $\text{cat}_{E_\lambda^{c(\lambda,r)}}(\Phi_r(\lambda\Omega_-)) = k \geq \text{cat}\Omega$.

Prova da Afirmação 2.7.2:

Definamos k conjuntos $C_j = \Phi_r^{-1}(A_j) \subset \Phi_r^{-1}(E_\lambda^{c(\lambda,r)}) \subset \lambda\Omega_-$. Sendo Φ_r uma aplicação contínua, temos que os conjuntos C_j são fechados. Além disso, concluímos que

$$\lambda\Omega_- = \bigcup_{j=1}^k C_j. \quad (2.24)$$

Com efeito, desde que $\Phi_{r,y} \in \mathcal{M}_\lambda$ com $E_\lambda(\Phi_{r,y}) = c(\lambda, r)$, para todo $y \in \lambda\Omega_-$, resulta que $\Phi_{r,y} \in E_\lambda^{c(\lambda,r)}$, para todo $y \in \lambda\Omega_-$ e, conseqüentemente, $\lambda\Omega_- \subset \Phi_r^{-1}(E_\lambda^{c(\lambda,r)})$.

Vejamos agora que os conjuntos C_j são contráteis em $\lambda\Omega_+$. Para isso, definiremos as deformações $\gamma_j \in C([0, 1] \times C_j, \lambda\Omega_+)$ por

$$\gamma_j(t, y) = \beta_\lambda(g_j(t, \Phi_{r,y})).$$

Segue de (2.22) que

$$\gamma_j(0, y) = y \text{ e } g_j(1, y) = \beta_\lambda(w_j), \quad \forall y \in C_j. \quad (2.25)$$

Desde que $w_j \in E_\lambda^{c(\lambda,r)}$ e $\lambda \in [\lambda_*, \infty)$, concluímos da Proposição 2.7.1, que $\beta_\lambda(w_j) \in \lambda\Omega_+$. Resulta de (2.25) que os conjuntos C_j são contráteis em $\lambda\Omega_+$.

Segue do fato de os conjuntos $\lambda\Omega_-$ e $\lambda\Omega_+$ serem homotopicamente equivalentes e da definição de categoria, que

$$cat\Omega = cat\Omega_\lambda = cat_{\lambda\Omega_+}(\lambda\Omega_-) \leq k = cat_{E_\lambda^{c(\lambda,r)}}(\Phi_r(\lambda\Omega_-)).$$

Provando a afirmação. \square

O resultado segue das Afirmações 2.7.1 e 2.7.2. ■

Agora demonstraremos o principal resultado do capítulo 2.

Demonstração do Teorema 2.1.1: Definamos o conjunto compacto $K := m_\lambda^{-1}(\Phi_r(\lambda\Omega_-))$ e observemos que $K \subset \Psi_\lambda^{c(\lambda,r)} \subset S_\lambda^+$. Além disso, segue da Proposição 2.7.2 que

$$cat\Omega \leq cat_{\Psi_\lambda^{c(\lambda,r)}}(K).$$

Do resultado abstrato de categoria em [72], com $c = c(\lambda) < c(\lambda, r) = d$, temos que $\Psi_\lambda^{c(\lambda,r)}$ contém $cat\Omega$ pontos críticos de Ψ_λ . Da Proposição 2.4.1(d), concluímos que o funcional E_λ possui ao menos $cat\Omega$ pontos críticos, cujas energias pertencem ao intervalo $[c(\lambda), c(\lambda, r)]$.

Para mostrar a existência de outro ponto crítico distinto dos anteriores, argumentaremos como em [[27], Theorem 1.1].

Sendo assim, escolhamos $u^* \in S_\lambda^+$ tal que $u^* \notin K$ e definamos o conjunto

$$\Theta = \{tu^* + (1-t)u : t \in [0, 1] \text{ e } u \in K\}.$$

Desde que K é compacto e $[0, 1]$ limitado, temos que Θ é compacto. Além disso, por construção, Θ é contrátil em Ψ_λ^c , onde

$$c(\lambda, r) < \max_{v \in \Theta} \Psi_\lambda =: c.$$

Novamente do resultado abstrato em [72], com $2 \leq k = \text{cat}\Omega$ e $e = c$, concluímos que o funcional Ψ_λ possui outro ponto crítico em $\Psi_\lambda^c \setminus \Psi_\lambda^{c(\lambda, r)}$. Da Proposição 2.4.1(d), segue-se que o funcional E_λ possui mais um ponto crítico com energia no intervalo $(c(\lambda, r), c]$. ■

Capítulo 3

Potencial nulo no infinito

3.1 Introdução

Neste último capítulo, estudaremos a existência de soluções nodais com energia mínima para o problema

$$(P) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_1 u = K(x)f(u), \mathbb{R}^3 \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

onde \mathcal{L}_1 é um operador não-local definido por

$$\mathcal{L}_1 u = M \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2 dx \right) [-\Delta u + V(x)u].$$

As aplicações $M : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $V, K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que M satisfaz (M_1) , (M'_2) e (M''_2) ; V e K são tais que

(I) $V(x), K(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}^3$ e $K \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

(II) Se $\{A_n\} \subset \mathbb{R}^3$ é uma sequência de conjuntos de Borel tais que $|A_n| \leq R$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e algum $R > 0$, então

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{A_n \cap B_r^c(0)} K(x) dx = 0, \text{ uniformemente em } n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

(III) Uma das condições abaixo ocorre:

$$\frac{K}{V} \in L^\infty(\mathbb{R}^3), \quad (3.2)$$

ou existe $p \in (2, 6)$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{K(x)}{V(x)^{(6-p)/4}} = 0, \quad (3.3)$$

e f satisfaz

(f'_1)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t^3} = 0, \text{ se ocorre (3.2) ou (3.3), para algum } p \in (2, 4],$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-1}} = 0, \text{ se (3.3) ocorre para algum } p \in (4, 6).$$

(f'_2)

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^5} = 0.$$

(f'_3)

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{t^4} = +\infty.$$

(f'_4) A aplicação

$$t \mapsto \frac{f(t)}{|t|^3}$$

é não-decrescente em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A seguir, enunciaremos o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.1.1 *Suponha que a função M satisfaz (M_1) , (M'_2) e (M''_2) , as aplicações V e K satisfazem $(I) - (III)$ e a função f satisfaz $(f'_1) - (f'_4)$. Então o problema (P) possui uma solução nodal de energia mínima. Além disso, se f é ímpar então (P) admite infinitas soluções (não necessariamente nodais).*

O presente capítulo está dividido da seguinte forma: A seção 3.2 é dedicada ao estudo de resultados preliminares e é composta por três subseções, na primeira introduzimos a estrutura variacional do problema e mencionamos alguns resultados de compacidade; na segunda obtemos alguns resultados (ver Lema 3.2.1 e Proposição 3.2.3) que nos permitirão contornar a ausência de uma estrutura diferenciável na variedade de Nehari e nos auxiliarão na obtenção do resultado de multiplicidade; na terceira estudamos o comportamento do conjunto onde buscaremos solução nodal com energia mínima. Finalmente, na última seção provamos o Teorema 3.1.1 .

3.2 Resultados Preliminares

3.2.1 Estrutura variacional

Nesta subseção deduziremos alguns resultados preliminares e fixaremos algumas notações.

Buscaremos soluções de (P) investigando a existência de pontos críticos do funcional energia

$$J(u) = \frac{1}{2} \widehat{M} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2 \right) - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)F(u),$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds$ e $F(t) = \int_0^t f(s)ds$.

Por (f'_1) , (f'_2) (ver Lema 1.0.5(i)), (I) e (III) o funcional J está bem definido sobre o espaço de Hilbert

$$E = \{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2 < \infty\},$$

munido do produto interno

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)uv$$

e da norma proveniente $\|\cdot\|$. Denotaremos por S_6 a melhor constante da imersão contínua de E em $L^6(\mathbb{R}^3)$.

Sendo as aplicações M e f contínuas, J é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$ e tem derivada dada por

$$J'(u)v = M(\|u\|^2)(u, v) - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)f(u)v, \quad \forall u, v \in E.$$

Sob as hipóteses $(I) - (III)$, Alves e Souto, em [15], provaram os seguintes resultados de compacidade envolvendo o espaço E :

Proposição 3.2.1 *Suponha que valem as hipóteses $(I) - (III)$. Então, E está compactamente imerso em $L_K^q(\mathbb{R}^3)$ para todo $q \in (2, 6)$, se (3.2) ocorre, e para $q = p$, se (3.3) ocorre, onde*

$$L_K^q(\mathbb{R}^3) = \{u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u|^q < \infty\}.$$

Proposição 3.2.2 *Suponha que f satisfaz $(f'_1) - (f'_2)$ e valem $(I) - (III)$. Seja $\{v_n\}$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ em E . Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)F(v_n) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} K(x)F(v)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)f(v_n)v_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} K(x)f(v)v.$$

Por simplicidade, definimos o subconjunto aberto E^\pm de E por

$$E^\pm = \{u \in E : u^\pm \neq 0\}.$$

A variedade de Nehari associada a J será denotada por

$$\mathcal{N} = \{u \in E \setminus \{0\} : J'(u)u = 0\}.$$

Denotamos por \mathcal{M} o conjunto

$$\mathcal{M} = \{u \in E^\pm : J'(u)(u^\pm) = 0\}$$

e por S a esfera unitária de E .

Observe que \mathcal{M} está contido em \mathcal{N} pois, uma vez que para cada $u \in E$ temos $u = u^+ + u^-$, obtemos

$$J'(u)u = J'(u)(u^+) + J'_\varepsilon(u)(u^-) = 0, \quad \forall u \in \mathcal{M}.$$

Além disso, se existirem pontos críticos nodais (mudam de sinal) para J eles pertencerão ao conjunto \mathcal{M} .

Finalmente, uma solução fraca de (P) é uma função $u \in E$ tal que

$$M(\|u\|^2)(u, v) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x)f(u)v, \quad \forall v \in E.$$

Dizemos que uma solução fraca $u \in E$ é nodal se $u \in E^\pm$.

Portanto, pontos críticos de J são soluções fracas de (P) e pontos críticos $u \in E^\pm$ de J são soluções fracas nodais de (P) .

3.2.2 Preliminares: multiplicidade de soluções

Nesta subseção obteremos alguns resultados que nos auxiliarão na prova do resultado de multiplicidade. Como estamos com hipóteses distintas daquelas consideradas no capítulo 1, daremos a demonstração do próximo lema.

Lema 3.2.1 *Suponha que M , V , K e f satisfazem as mesmas hipóteses do Teorema 3.1.1. Assim:*

(A₁) *Para cada $u \in E \setminus \{0\}$, definimos $h_u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ por $h_u(t) = J(tu)$. Então, existe um único $t_u > 0$ tal que $h'_u(t) > 0$ em $(0, t_u)$ e $h'_u(t) < 0$ em (t_u, ∞) .*

(A₂) *Existe $\tau > 0$, independente de u , tal que $t_u \geq \tau$ para todo $u \in S$. Além disso, para cada conjunto compacto $\mathcal{W} \subset S$ existe $C_{\mathcal{W}} > 0$ tal que $t_u \leq C_{\mathcal{W}}$, para todo $u \in \mathcal{W}$.*

(A₃) *A aplicação $\widehat{m} : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{N}$, definida por $\widehat{m}(u) = t_u u$, é contínua. A aplicação $m : S \rightarrow \mathcal{N}$, definida por $m = \widehat{m}|_S$, é um homeomorfismo entre S e \mathcal{N} . Além disso, a inversa de m é dada por $m^{-1}(u) = u/\|u\|$.*

Demonstração:

(A₁) Suponhamos primeiramente que (3.2) ocorre. Segue de (M'_2) , (f'_1) e (f'_2) (ver Lema 1.0.6(ii)) que para cada $\xi > 0$ existe $C_\xi > 0$ tal que

$$\begin{aligned} J(tu) &= \frac{1}{2} \widehat{M}(\|tu\|^2) - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)F(tu) \\ &\geq \frac{m_0}{2} t^2 \|u\|^2 - \frac{\xi}{2} \int_{\mathbb{R}^3} K(x)t^2 u^2 - C_\xi \int_{\mathbb{R}^3} K(x)t^6 u^6. \end{aligned}$$

De (3.2) e (I), obtemos

$$J(tu) \geq \frac{1}{2} (m_0 - \xi |K/V|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}) t^2 \|u\|^2 - C_\xi |K|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \frac{1}{S_6^3} t^6 \|u\|^6. \quad (3.4)$$

Escolhendo $\xi < m_0/|K/V|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$, obtemos $t_0 > 0$ (suficientemente pequeno) tal que

$$0 < h_u(t) = J(tu), \quad \forall t < t_0. \quad (3.5)$$

Supondo que (3.3) ocorre, segue de [15] que existe $C_p > 0$ tal que para cada $\varepsilon \in (0, C_p)$ obtemos $R > 0$ satisfazendo

$$\int_{B_R(0)^c} K(x)|u|^p \leq \varepsilon \int_{B_R(0)^c} (V(x)u^2 + u^6), \quad \forall u \in E. \quad (3.6)$$

Sendo assim, novamente de (M'_2) , (f'_1) e (f'_2) (ver Lema 1.0.6(ii))

$$J(tu) \geq \frac{m_0}{2}t^2\|u\|^2 - \frac{\xi}{2}t^p \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u|^p - C_\xi t^6 \int_{\mathbb{R}^3} K(x)u^6.$$

De (3.6), da desigualdade de Holder com expoentes $6/p$ e $6/(6-p)$ e de (I) segue que

$$\begin{aligned} J(tu) &\geq \frac{m_0}{2}t^2\|u\|^2 - \frac{\xi}{2}t^p \varepsilon \int_{B_R(0)^c} [V(x)u^2 + u^6] \\ &\quad - \xi t^p |K|_{L^{6/(6-p)}(B_R(0))} \left(\int_{B_R(0)} u^6 \right)^{p/6} - C_\xi |K|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} t^6 \int_{\mathbb{R}^3} u^6. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} J(tu) &\geq \frac{m_0}{2}t^2\|u\|^2 - C_\xi |K|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \frac{1}{S_6^3} t^6 \|u\|^6 \\ &\quad - \xi \left(\varepsilon \|u\|^2 + \frac{1}{S_6^3} \varepsilon \|u\|^6 + |K|_{L^{6/(6-p)}(B_R(0))} \frac{1}{S_6^{p/2}} \|u\|^p \right) t^p. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Mostrando novamente que (3.5) ocorre.

Por outro lado,

$$J(tu) \leq \frac{1}{2} \widehat{M}(\|tu\|^2) - \int_A K(x)F(tu),$$

onde $A \subset \text{supp} u$ é um conjunto mensurável de medida positiva e finita. De (M''_2) (ver Lema 1.0.1(ii)) e (f'_3) (ver Lema 1.0.6(iii)), existem constantes positivas C_1, C_2, C_3 e C_4 , com C_3 tão grande quanto necessário, tais que

$$M(t) \leq C_1 + C_2 t, \quad \forall t \geq 0 \text{ e } F(s) \geq C_3 s^4 - C_4, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Daí,

$$J(tu) \leq C_1 t^2 \|u\|^2 + C_2 t^4 \|u\|^4 - C_3 t^4 \int_A K(x)u^4 + C_4 \int_A K(x).$$

Assim, temos

$$J(tu) \leq C_1 t^2 \|u\|^2 - \left(C_3 \int_A K(x) u^4 - C_2 \|u\|^4 \right) t^4 + C_4 |K|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} |A|. \quad (3.8)$$

Logo, existe $R > 0$ (suficientemente grande) tal que

$$h_u(R) = J(Ru) < 0. \quad (3.9)$$

Sendo a aplicação $h_u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, ela admite ao menos um ponto de máximo $t_u > 0$.

Devido as hipóteses (M_2'') e (f_4') , segue-se que t_u é o único ponto crítico de h_u e portanto t_u é ponto de máximo global. Com efeito, suponha por contradição que existem números reais positivos $t_1 > t_2$ tais que $h_u'(t_1) = h_u'(t_2) = 0$. Segue da definição de h_u que

$$0 > \frac{M(\|t_1 u\|^2)}{\|t_1 u\|^2} - \frac{M(\|t_2 u\|^2)}{\|t_2 u\|^2} = \frac{1}{\|u\|^4} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \left[\frac{f(t_1 u)}{(t_1 u)^3} - \frac{f(t_2 u)}{(t_2 u)^3} \right] u^4 \geq 0,$$

o que não faz sentido. Sendo assim, para cada $u \in E \setminus \{0\}$, a aplicação h_u tem um único ponto de máximo global $t_u > 0$, o qual é o único real positivo satisfazendo $t_u u \in \mathcal{N}$. Isso prova (A_1) .

(A_2) Seja $u \in S$. Segue de (A_1) que existe $t_u > 0$ tal que

$$M(t_u^2 \|u\|^2) t_u^2 \|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) f(t_u u)(t_u u).$$

Da igualdade anterior e de (M_2') , temos que

$$m_0 t_u^2 \|u\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} K(x) f(t_u u)(t_u u).$$

Estimando o lado direito da desigualdade acima como em (3.4) e (3.7), concluímos que existe $\tau > 0$ (independente de u) tal que $t_u \geq \tau$.

Por outro lado, seja $\mathcal{W} \subset S$ compacto. Suponha por contradição que existe $\{u_n\} \subset \mathcal{W}$ tal que $t_n := t_{u_n} \rightarrow \infty$. Sendo \mathcal{W} compacto, existe $u \in \mathcal{W}$ com $u_n \rightarrow u$ em E . De (3.8), obtemos

$$J(t_n u_n) \rightarrow -\infty \text{ em } \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Desde que (M_2'') e (f_4') (Ver Lemas 1.0.3 e 1.0.5(iii)) implicam que

$$t \mapsto \frac{1}{2}\widehat{M}(t) - \frac{1}{4}M(t)t \text{ e } t \mapsto \frac{1}{4}f(t)t - 4F(t)$$

são aplicações, respectivamente, crescente e não-decrescente para $t \geq 0$ e

$$t \mapsto \frac{1}{4}f(t)t - 4F(t)$$

é não-crescente para $t \leq 0$, segue que, para cada $v \in \mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(v) &= J_\varepsilon(v) - \frac{1}{4}J'_\varepsilon(v)v \\ &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|v\|_\varepsilon^2) - \frac{1}{4}M(\|v\|_\varepsilon^2)\|v\|_\varepsilon^2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \left[\frac{1}{4}f(v)v - F(v) \right] \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Uma vez que $\{t_{u_n}u_n\} \subset \mathcal{N}$, concluímos de (3.10) que (3.11) não ocorre, o que é uma contradição. Portanto (A_2) é verdadeiro.

(A_3) Vejamos primeiramente que \widehat{m} , m e m^{-1} estão bem definidas. De fato, para cada $u \in E \setminus \{0\}$ segue, de (A_1) , que existe um único $m(u) \in \mathcal{N}$. Por outro lado, se $u \in \mathcal{N}$ então $u \neq 0$, donde $m^{-1}(u) = u/\|u\| \in S$ e m^{-1} está bem definida.

Desde que,

$$m^{-1}(m(u)) = m^{-1}(t_u u) = \frac{t_u u}{t_u \|u\|} = u, \quad \forall u \in S$$

e

$$m(m^{-1}(u)) = m\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = t_{\left(\frac{u}{\|u\|}\right)} \frac{u}{\|u\|} = u, \quad \forall u \in \mathcal{N},$$

concluímos que m é bijetiva com inversa m^{-1} .

Finalmente, segue da definição de m^{-1} a sua continuidade. Para mostrar que $\widehat{m} : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{N}$ é contínua, sejam $\{u_n\} \subset E \setminus \{0\}$ e $u \in E \setminus \{0\}$ tais que $u_n \rightarrow u$ em E . De (A_2) , existe $t_0 > 0$ tal que $\|u_n\|t_{u_n} = t_{\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)} \rightarrow t_0$. Assim, $t_{u_n} \rightarrow t_0/\|u\|$. Desde que, $t_{u_n}u_n \in \mathcal{N}$ temos

$$M(t_{u_n}^2 \|u_n\|^2) t_{u_n} \|u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) f(t_{u_n} u_n) u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite de $n \rightarrow \infty$, concluímos que

$$M \left(\frac{t_0^2}{\|u\|^2} \|u\|^2 \right) \frac{t_0}{\|u\|} \|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) f \left(\frac{t_0}{\|u\|} u \right) u.$$

Donde $(t_0/\|u\|)u \in \mathcal{N}$ e consequentemente $t_u = t_0/\|u\|$, mostrando que $\widehat{m}(u_n) \rightarrow \widehat{m}(u)$. Logo, \widehat{m} e m são contínuas. ■

Definamos agora as aplicações

$$\widehat{\Psi} : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } \Psi : S \rightarrow \mathbb{R},$$

por $\widehat{\Psi}(u) = J(\widehat{m}(u))$ e $\Psi := \widehat{\Psi}|_S$.

Os próximos resultados são consequências diretas do Lema 3.2.1 e suas demonstrações são análogas as da Proposição 1.3.1 e do Lema 1.3.3, respectivamente.

Proposição 3.2.3 *Sob as hipóteses do Lema 3.2.1,*

(a) $\widehat{\Psi} \in C^1(E \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ e

$$\widehat{\Psi}'(u)v = \frac{\|\widehat{m}(u)\|}{\|u\|} J'(\widehat{m}(u))v, \quad \forall u \in E \setminus \{0\} \text{ e } \forall v \in E.$$

(b) $\Psi \in C^1(S, \mathbb{R})$ e

$$\Psi'(u)v = \|m(u)\| J'(m(u))v, \quad \forall v \in T_u S.$$

(c) *Se $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_d$ para Ψ então $\{m(u_n)\}$ é uma sequência $(PS)_d$ para J . Se $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$ é uma sequência $(PS)_d$ limitada para J então $\{m^{-1}(u_n)\}$ é uma sequência $(PS)_d$ para Ψ .*

(d) *u é um ponto crítico de Ψ se, e somente se, $m(u)$ é um ponto crítico não-trivial de J . Além disso, os valores críticos correspondentes coincidem e*

$$\inf_S \Psi = \inf_{\mathcal{N}} J.$$

Lema 3.2.2

$$d_\infty := \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) = \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \max_{t > 0} J(tu) = \inf_{u \in S} \max_{t > 0} J(tu). \quad (3.12)$$

Em particular, as desigualdades em (3.4) e (3.7), juntamente com a identidade em (3.12), nos dizem que

$$d_\infty > 0. \quad (3.13)$$

3.2.3 Lemas técnicos

Nesta subseção estudaremos algumas propriedades do conjunto \mathcal{M} e da função $h_u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h_u(t, s) = J(tu^+ + su^-)$, para cada $u \in E^\pm$ fixado. Tais estudos nos auxiliarão na prova do resultado de existência de solução nodal com energia mínima. Nossos argumentos são ligeiramente distintos daqueles em [14] e [43], por exemplo, fornecemos uma prova alternativa para o Lema 3.2.4, a qual não faz uso do Teorema de Miranda em [61].

Lema 3.2.3 *Um par (t, s) , com coordenadas positivas, é ponto crítico de h_u se, e somente se, $tu^+ + su^- \in \mathcal{M}$.*

Demonstração:

A demonstração é uma consequência direta da igualdade

$$\begin{aligned} \nabla h_u(t, s) &= \left(\frac{\partial h_u}{\partial t}(t, s), \frac{\partial h_u}{\partial s}(t, s) \right) \\ &= (J'(tu^+ + su^-)(u^+), J'(tu^+ + su^-)(u^-)) \\ &= \left(\frac{1}{t} J'(tu^+ + su^-)(tu^+), \frac{1}{s} J'(tu^+ + su^-)(su^-) \right). \end{aligned}$$

■

Lema 3.2.4 *Para cada $u \in E^\pm$, existem $t_+, t_- > 0$ tais que (t_+, t_-) é um ponto crítico de h_u .*

Demonstração: Para cada $u \in E^\pm$ e $s_0 > 0$ fixados, definamos a função $g_{s_0} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por $g_{s_0}(t) = h_u(t, s_0)$. Argumentando como na demonstração do Lema 3.2.1(A₁), concluímos que g_{s_0} admite ponto de máximo positivo.

Para mostrar que tal ponto é único é suficiente notar que, de (M_2'') e do Lema 1.0.4(ii), a aplicação

$$t \mapsto \frac{M(t+a)}{t}$$

é decrescente, para cada $a \geq 0$ fixado. Daí e de argumentos como na demonstração do Lema 3.2.1(A₁) resulta que existe um único

$$t_0 = t_0(u, s_0) > 0, \tag{3.14}$$

tal que

$$g'_{s_0}(t) > 0 \text{ se } t \in (0, t_0), g'_{s_0}(t_0) = 0 \text{ e } g'_{s_0}(t) < 0 \text{ se } t \in (t_0, \infty). \quad (3.15)$$

Assim, fica bem definida a aplicação $\varphi_1 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ por $\varphi_1(s) = t(u, s)$, onde $t(u, s)$ satisfaz as propriedades mencionadas em (3.15), com s no lugar de s_0 .

Da definição de φ_1 e de (3.15), temos

$$g'_s(\varphi_1(s)) = \frac{\partial h_u}{\partial t}(\varphi_1(s), s) = 0, \quad \forall s \geq 0.$$

Isto é,

$$M(\varphi_1(s)^2 \|u^+\|^2 + s^2 \|u^-\|^2) \varphi_1(s) \|u^+\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) f(\varphi_1(s) u^+) u^+, \quad (3.16)$$

para todo $s \geq 0$.

Agora estudaremos algumas propriedades da função φ_1 .

a) φ_1 é contínua.

De fato, suponha que $s_n \rightarrow s_0$ em \mathbb{R} . Suponha ainda, por contradição, que $\varphi(s_n) \rightarrow \infty$, a menos de subsequência. Neste caso, para n grande, temos $\varphi(s_n) \geq s_n$ e de (M_1) e (3.16), obtemos

$$\frac{M(\varphi_1(s_n)^2 \|u\|^2)}{\varphi_1(s_n)^2 \|u\|^2} \geq \frac{1}{\|u^+\|^2 \|u\|^2} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \left[\frac{f(\varphi_1(s_n) u^+)}{(\varphi_1(s_n) u^+)^3} \right] (u^+)^4, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.17)$$

De (M_2'') , (f_4') e do Lema de Fatou, resulta que passando ao limite de $n \rightarrow \infty$ chegamos a uma contradição. Logo $\{\varphi(s_n)\}$ é limitada. Portanto, existe $t_0 \geq 0$ tal que, a menos de subsequência,

$$\varphi(s_n) \rightarrow t_0. \quad (3.18)$$

Passando ao limite de $n \rightarrow \infty$ em (3.16) com $s = s_n$ e usando (3.18), resulta que

$$M(t_0^2 \|u^+\|^2 + s_0^2 \|u^-\|^2) t_0 \|u^+\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) f(t_0 u^+) u^+.$$

Mostrando que

$$g'_{s_0}(t_0) = \frac{\partial h_u}{\partial t}(t_0, s_0) = 0$$

e, conseqüentemente, $t_0 = \varphi_1(s_0)$. Isso mostra que φ_1 é contínua.

b) $\varphi_1(0) > 0$.

Segue diretamente do Lema 3.2.1(A_1). Também podemos concluir o ítem b) da seguinte forma. Suponha por contradição que $\varphi_1(0) = 0$. Passando ao limite de $s \rightarrow 0$ em

$$M(\varphi_1(s)^2 \|u^+\|^2 + s^2 \|u^-\|^2) = \frac{1}{\|u^+\|^2} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \left[\frac{f(\varphi_1(s)u^+)}{(\varphi_1(s)u^+)} \right] (u^+)^2, \quad \forall s \geq 0$$

e usando (M_2'') chegamos a uma contradição. Logo b) ocorre.

c) $\varphi_1(s) \geq s$ para s pequeno e $\varphi_1(s) \leq s$ para s grande.

De a) e b) segue-se que $\varphi_1(s) \geq s$ para s pequeno. Por outro lado, argumentando exatamente como em (3.17), podemos provar que não existe qualquer sequência $\{s_n\}$, com $s_n \rightarrow \infty$, tal que $\varphi_1(s_n) \geq s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrando que c) ocorre.

De modo análogo ao que fizemos na definição de g_s , para cada $t \geq 0$ fixado, podemos definir $g^t(s) := h_u(t, s)$ e conseqüentemente podemos definir uma aplicação φ_2 , de modo análogo a definição de φ_1 , a qual satisfaz as propriedades a)-c).

Para provar o lema, definamos as sequências de números reais positivos $\{t_n\}$ e $\{s_n\}$ da seguinte forma. Fixamos $s_1 > 0$ de modo arbitrário e definimos

$$t_n = \varphi_1(s_n) \text{ e } s_{n+1} = \varphi_2(t_n). \quad (3.19)$$

Por definição, temos que

$$\frac{\partial h_u}{\partial t}(t_n, s_n) = \frac{\partial h_u}{\partial s}(t_n, s_{n+1}) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.20)$$

Segue de (3.20) que, para provar o lema, é suficiente mostrarmos que $\{t_n\}$ e $\{s_n\}$ admitem subsequências (com mesmos índices) convergentes, com limites positivos.

Vejamos primeiramente que tais sequências são limitadas. Suponha por contradição que existe uma subsequência, que ainda será denotada por $\{t_n\}$, tal que

$$t_n \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

De c), existe $C_1 > 0$ tal que para todo n com $t_n \geq C_1$ temos

$$s_{n+1} \leq t_n.$$

Do mesmo modo, existe $C_2 > 0$, tal que $s \geq C_2$ implica $\varphi_1(s) \leq s$. Assim, se $s_{n+1} \geq C_2$, teremos

$$t_{n+1} = \varphi_1(s_{n+1}) \leq s_{n+1} \leq t_n. \quad (3.22)$$

Por outro lado, de a), se $s_{n+1} \leq C_2$, teremos

$$t_{n+1} = \varphi_1(s_{n+1}) \leq C_3 := \max_{s \in [0, C_2]} \varphi_2(s). \quad (3.23)$$

Considerando os casos (3.22) e (3.23), concluímos que $\{t_n\}$ é limitada, o que contradiz (3.21). Logo, $\{t_n\}$ é limitada, isto é, existe $C_4 > 0$ tal que $t_n \leq C_4$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Novamente, de a), obtemos

$$s_{n+1} = \varphi_2(t_n) \leq C_5 := \max_{t \in [0, C_4]} \varphi_2(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostrando que $\{t_n\}$ e $\{s_n\}$ são limitadas.

Assim, existem $t_{\pm} \geq 0$ tais que $t_n \rightarrow t_+$ e $s_n \rightarrow t_-$, a menos de subsequência. Note que, de (3.20) e a), temos que

$$t_+ = \varphi_1(t_-) \text{ e } t_- = \varphi_2(t_+). \quad (3.24)$$

De (3.14), b) e (3.24) temos que $t_{\pm} > 0$. ■

Lema 3.2.5 *O par (t_+, t_-) , obtido no lema anterior, é o único ponto crítico com coordenadas positivas da aplicação h_u .*

Demonstração:

Seja $w \in \mathcal{M}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \nabla h_w(1, 1) &= \left(\frac{\partial h_w}{\partial t}(1, 1), \frac{\partial h_w}{\partial s}(1, 1) \right) \\ &= (J'_\varepsilon(w^+ + w^-)(w^+), J'_\varepsilon(w^+ + w^-)(w^-)) \\ &= (0, 0). \end{aligned}$$

Mostrando que $(1, 1)$ é ponto crítico de h_w .

Mostraremos que, quando $w \in \mathcal{M}$, o par $(1, 1)$ é em verdade o único ponto crítico de h_w com coordenadas positivas.

De fato, suponhamos que (t_0, s_0) é um ponto crítico de h_w tal que $t_0, s_0 > 0$. Então

$$M(t_0^2 \|w^+\|^2 + s_0^2 \|w^-\|^2) t_0^2 \|w^+\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) f(t_0 w^+) t_0 w^+ \quad (3.25)$$

e

$$M(t_0^2 \|w^+\|^2 + s_0^2 \|w^-\|^2) s_0^2 \|w^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) f(s_0 w^-) s_0 w^-. \quad (3.26)$$

Para provar este lema é suficiente mostramos que $t_0 = s_0 = 1$. Para isso, provaremos que $0 < t_0, s_0 \leq 1$ e depois mostraremos que nenhum dos casos $t_0 < 1$ ou $s_0 < 1$ ocorre.

Podemos supor sem perda de generalidade que $0 < t_0 \leq s_0$. Neste caso, segue de (3.26) e de (M_1) que

$$M(s_0^2 \|w\|^2) s_0^2 \|w^-\|^2 \geq \int_{\mathbb{R}^3} K(x) f(s_0 w^-) (s_0 w^-).$$

Daí,

$$\frac{M(s_0^2 \|w\|^2)}{s_0^2 \|w\|^2} \geq \frac{1}{\|w^-\|^2 \|w\|^2} \int_{\text{supp}(w^-)} K(x) \left[\frac{f(s_0 w^-)}{(s_0 w^-)^3} \right] (w^-)^4. \quad (3.27)$$

Por outro lado, como $w \in \mathcal{M}$, obtemos

$$\frac{M(\|w\|^2)}{\|w\|^2} = \frac{1}{\|w^-\|^2 \|w\|^2} \int_{\text{supp}(w^-)} K(x) \left[\frac{f(w^-)}{(w^-)^3} \right] (w^-)^4. \quad (3.28)$$

De (3.27) e (3.28), obtemos

$$\frac{M(s_0^2 \|w\|^2)}{s_0^2 \|w\|^2} - \frac{M(\|w\|^2)}{\|w\|^2} \geq \frac{1}{\|w^-\|^2 \|w\|^2} \int_{\text{supp}(w^-)} K(x) \left[\frac{f(s_0 w^-)}{(s_0 w^-)^3} - \frac{f(w^-)}{(w^-)^3} \right] (w^-)^4. \quad (3.29)$$

De (3.29), (M_2'') e (f_4') concluimos que $0 < t_0 \leq s_0 \leq 1$.

Desde que estamos considerando $0 < t_0 \leq s_0$, para mostrar que não ocorre nenhum dos casos $t_0 < 1$ ou $s_0 < 1$ é suficiente provarmos que o primeiro não ocorre.

Para tanto, notemos que de (3.25), (M_1) e de $0 < t_0 \leq s_0$

$$\frac{M(t_0^2 \|w\|^2)}{t_0^2 \|w\|^2} \leq \frac{1}{\|w^+\|^2 \|w\|^2} \int_{\text{supp}(w^+)} K(x) \left[\frac{f(t_0 w^+)}{(t_0 w^+)^3} \right] (w^+)^4. \quad (3.30)$$

Por outro lado, de $w \in \mathcal{M}$, obtemos

$$\frac{M(\|w\|^2)}{\|w\|^2} = \frac{1}{\|w^+\|^2\|w\|^2} \int_{\text{supp}(w^+)} K(x) \left[\frac{f(w^+)}{(w^+)^3} \right] (w^+)^4. \quad (3.31)$$

Segue de (3.30) e de (3.31), que

$$\frac{M(\|w\|^2)}{\|w\|^2} - \frac{M(t_0^2\|w\|^2)}{t_0^2\|w\|^2} \geq \frac{1}{\|w^+\|^2\|w\|^2} \int_{\text{supp}(w^+)} K(x) \left[\frac{f(w^+)}{(w^+)^3} - \frac{f(t_0w^+)}{(t_0w^+)^3} \right] (w^+)^4.$$

De (M_2'') e (f_4') concluímos que $t_0 \geq 1$, e conseqüentemente, $t_0 = s_0 = 1$. Mostrando que $(1, 1)$ é o único ponto crítico de h_w com coordenadas positivas.

Para finalizar a demonstração, sejam $u \in E^\pm$ e (t_1, s_1) e (t_2, s_2) pontos críticos com coordenadas positivas para a aplicação h_u . Do Lema 3.2.3, concluímos que

$$w_1 = t_1u^+ + s_1u^- \in \mathcal{M} \text{ e } w_2 = t_2u^+ + s_2u^- \in \mathcal{M}.$$

Sendo assim,

$$w_2 = \left(\frac{t_2}{t_1} \right) t_1u^+ + \left(\frac{s_2}{s_1} \right) s_1u^- = \left(\frac{t_2}{t_1} \right) w_1^+ + \left(\frac{s_2}{s_1} \right) w_1^- \in \mathcal{M}.$$

Uma vez que por definição $w_1 \in E^\pm$, segue do Lema 3.2.3 que $\left(\frac{t_2}{t_1}, \frac{s_2}{s_1} \right)$ é ponto crítico de h_{w_1} com coordenadas positivas. Desde que $w_1 \in \mathcal{M}$, resulta do que provamos anteriormente que

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{s_2}{s_1} = 1.$$

Mostrando que $t_1 = t_2$ e $s_1 = s_2$. ■

Lema 3.2.6 *A aplicação h_u admite um ponto de máximo global $(a_0, b_0) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$.*

Demonstração:

Observemos que por (M_2'') (ver Lema 1.0.1(ii)) e (f_3') (ver Lema 1.0.6(iii)), existem constantes positivas C_1 e C_2 com C_2 tão grande quanto necessário, tal

que

$$\begin{aligned}
h_u(t, s) &\leq \\
&\frac{C_1}{2}\|tu^+ + su^-\|^2 + \frac{C_1}{4}\|tu^+ + su^-\|^4 - \int_{A^+} K(x)F(tu^+) - \int_{A^-} K(x)F(su^-) \leq \\
&\frac{C_1}{2}t^2\|u^+\|^2 - \left(C_2 \int_{A^+} K(x)(u^+)^4 - \frac{C_1}{4}\|u^+\|^4 \right) t^4 + \\
&\frac{C_1}{2}s^2\|u^-\|^2 - \left(C_2 \int_{A^-} K(x)|u^-|^4 - \frac{C_1}{4}\|u^-\|^4 \right) s^4 + \\
&C_2|K|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}(|A^+| + |A^-|), \tag{3.32}
\end{aligned}$$

onde $A^+ \subset \text{supp}(u^+)$ e $A^- \subset \text{supp}(u^-)$ têm medidas positivas e finitas. Logo,

$$\lim_{|(t,s)| \rightarrow \infty} h_u(t, s) = -\infty. \tag{3.33}$$

Sendo h_u contínua, concluímos de (3.33) que h_u assume máximo global em algum ponto $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, o qual é obviamente um ponto crítico de h_u .

Finalmente, de (M_1) e do Lema 1.0.4(i), temos que

$$J(tu^+) + J(su^-) \leq J(tu^+ + su^-), \quad \forall u \in E^\pm \text{ e } t, s \geq 0,$$

ou seja

$$h_u(t, 0) + h_u(0, s) \leq h_u(t, s), \quad \forall u \in E^\pm \text{ e } t, s \geq 0.$$

Isso nos permite concluir que

$$\max_{t \geq 0} h_u(t, 0) < \max_{t, s > 0} h_u(t, s) \text{ e } \max_{s \geq 0} h_u(0, s) < \max_{t, s > 0} h_u(t, s). \tag{3.34}$$

Mostrando que $(a_0, b_0) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$. ■

Lema 3.2.7 *As aplicações $\alpha_+(r) = \frac{\partial h_u}{\partial t}(r, t_-)r$ e $\alpha_-(r) = \frac{\partial h_u}{\partial s}(t_+, r)r$ são tais que $\alpha_\pm(r) > 0$ se $r \in (0, t_\pm)$ e $\alpha_\pm(r) < 0$ se $r \in (t_\pm, \infty)$.*

Demonstração:

Segue, de argumentos como na demonstração do Lema 3.2.1(A_1), que existe um único $\bar{t} > 0$ tal que $\frac{\partial h_u}{\partial t}(\bar{t}, t_-) = 0$, o qual satisfaz $\frac{\partial h_u}{\partial t}(r, t_-) > 0$, se $r \in (0, \bar{t})$, e $\frac{\partial h_u}{\partial t}(r, t_-) < 0$, se $r \in (\bar{t}, \infty)$. Do Lema 3.2.4 concluímos que $\bar{t} = t_+$. Logo, α_+ se comporta do mesmo modo. O mesmo vale para α_- . ■

Lema 3.2.8 *Se $\{u_n\} \subset \mathcal{M}$ e $u_n \rightharpoonup u$ em E então $u \in E^\pm$.*

Demonstração: Primeiramente, observemos que existe $\tau > 0$ tal que

$$\tau \leq \|v^\pm\|, \quad \forall v \in \mathcal{M}. \quad (3.35)$$

De fato, se $v \in \mathcal{M}$ então

$$M(\|v\|^2)\|v^\pm\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} K(x)f(v^\pm)v^\pm.$$

De (M'_2) resulta que

$$m_0\|v^\pm\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} K(x)f(v^\pm)v^\pm. \quad (3.36)$$

Argumentando como em (3.4) e (3.7) e usando (3.36), concluímos que (3.35) ocorre.

Sendo assim, se $\{u_n\} \subset \mathcal{M}$, temos que

$$m_0\tau^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} K(x)f(u_n^\pm)u_n^\pm, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.37)$$

Supondo que $u_n \rightharpoonup u$ em E e passando ao limite de $n \rightarrow \infty$ em (3.37), segue da Proposição 3.2.2 que

$$m_0\tau^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} K(x)f(u^\pm)u^\pm,$$

mostrando que $u \in E^\pm$. ■

No que segue, denotaremos por c_∞ o número

$$c_\infty = \inf_{u \in \mathcal{M}} J(u).$$

Lema 3.2.9 *Vale a seguinte desigualdade*

$$c_\infty \geq 2d_\infty. \quad (3.38)$$

Demonstração:

Observe que devido a inclusão $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, temos que $c_\infty \geq d_\infty$. Por outro lado, seja $v \in \mathcal{M} \subset E^\pm$. Do Lema 3.2.1(A₁), existem t^+ e t^- positivos tais que $t^\pm v^\pm \in \mathcal{N}$. Segue dos Lemas 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6, de (M_1) e do Lema 1.0.4(i) que

$$J(v) \geq J(t^+v^+ + t^-v^-) \geq J(t^+v^+) + J(t^-v^-) \geq 2d_\infty, \quad \forall v \in \mathcal{M}.$$

Mostrando que

$$2d_\infty \leq c_\infty.$$

■

3.3 Existência e multiplicidade de soluções

Demonstração do resultado de existência do Teorema 3.1.1:

Dividiremos a demonstração em duas partes:

Parte 1: Existência de um ponto de mínimo em \mathcal{M} .

Seja $\{u_n\} \subset \mathcal{M}$ tal que

$$J(u_n) \rightarrow c_\infty \text{ em } \mathbb{R}. \quad (3.39)$$

Mostraremos que $\{u_n\}$ é limitada em E . Com efeito, suponha por contradição que existe uma subsequência, ainda denotada por (u_n) , tal que

$$\|u_n\| \rightarrow \infty. \quad (3.40)$$

Definamos $v_n := u_n/\|u_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desde que $\{v_n\}$ é limitada no espaço de Hilbert E , existe $v \in E$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } E. \quad (3.41)$$

Da Proposição 3.2.1 concluímos que, a menos de subsequência,

$$v_n(x) \rightarrow v(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^3. \quad (3.42)$$

Segue dos Lemas 3.2.4, 3.2.5 e de $\{u_n\} \subset \mathcal{M}$ que $t_+(v_n) = t_-(v_n) = \|u_n\|$. Assim, dos Lemas 3.2.4, 3.2.5 e 3.2.6

$$J(\|u_n\|v_n) \geq J(tv_n) = \frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)F(tv_n), \quad \forall t > 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}. \quad (3.43)$$

Ou seja,

$$J(u_n) \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)F(tv_n), \quad \forall t > 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}. \quad (3.44)$$

Suponha que $v = 0$. Neste caso, segue de (3.41) e da Proposição 3.2.2 que

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)F(tv_n) \rightarrow 0, \quad \forall t > 0. \quad (3.45)$$

Passando ao limite de $n \rightarrow \infty$ em (3.44) e usando (M'_2) , (3.39) e (3.45), obtemos

$$c_\infty \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) \geq \frac{m_0}{2}t^2, \quad \forall t > 0,$$

o que é uma contradição. Logo, $v \neq 0$.

Por outro lado, da definição de J

$$\frac{1}{\|u_n\|^4}J(u_n) = \frac{1}{2}\frac{\widehat{M}(\|u_n\|^2)}{\|u_n\|^4} - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\frac{F(\|u_n\|v_n)}{(\|u_n\|v_n)^4}(v_n)^4, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.46)$$

Segue-se de $v \neq 0$, (3.40), (3.42), (f'_4) e do Lema de Fatou que

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\frac{F(\|u_n\|v_n)}{(\|u_n\|v_n)^4}(v_n)^4 \rightarrow +\infty. \quad (3.47)$$

Assim, passando ao limite de $n \rightarrow \infty$ em (3.46) e usando (3.39) (3.40), (M''_2) e (3.47), resulta que $0 \leq -\infty$, o que é uma contradição. Mostrando que $\{u_n\}$ é limitada em E .

Uma vez que $\{u_n\}$ é limitada, existe $u \in E$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } E. \quad (3.48)$$

Do Lema 3.2.8, temos que $u \in E^\pm$. Dos Lemas 3.2.4, 3.2.5, existem únicos $t_+, t_- > 0$ tais que

$$t_+u^+ + t_-u^- \in \mathcal{M}. \quad (3.49)$$

Mostraremos que

$$0 < t_+, t_- \leq 1. \quad (3.50)$$

Com efeito, de (3.48) e da Proposição 3.2.2, resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)f((u_n)^\pm)(u_n)^\pm \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} K(x)f(u^\pm)u^\pm \quad (3.51)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)F((u_n)^\pm) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} K(x)F(u^\pm)u^\pm. \quad (3.52)$$

De $\{u_n\} \subset \mathcal{M}$, (3.48), (M_1) , (3.51), da semi-continuidade inferior da norma e do Lema de Fatou obtemos

$$J'(u)u^\pm \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J'(u_n)u_n^\pm = 0. \quad (3.53)$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $0 < t_+ \leq t_-$. Assim, de (M_1) e (3.49), temos

$$\frac{M(t_-^2 \|u\|^2)}{t_-^2 \|u\|^2} \geq \frac{1}{\|u^-\|^2 \|u\|^2} \int_{\text{supp}(u^-)} \left[\frac{f(t_- u^-)}{(t_- u^-)^3} \right] K(x)(u^-)^4. \quad (3.54)$$

Por outro lado, de (3.53), obtemos

$$\frac{M(\|u\|^2)}{\|u\|^2} \leq \frac{1}{\|u^-\|^2 \|u\|^2} \int_{\text{supp}(u^-)} \left[\frac{f(u^-)}{(u^-)^3} \right] K(x)(u^-)^4. \quad (3.55)$$

De (3.54) e (3.55), segue-se que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|u^-\|^2 \|u\|^2} \int_{\text{supp}(u^-)} \left[\frac{f(t_- u^-)}{(t_- u^-)^3} - \frac{f(u^-)}{(u^-)^3} \right] K(x)(u^-)^4 \leq \\ & \frac{M(t_-^2 \|u\|^2)}{t_-^2 \|u\|^2} - \frac{M(\|u\|^2)}{\|u\|^2}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

De (3.56), (M_2'') e (f_3') , concluímos que $0 < t_- \leq 1$ e (3.50) ocorre.

Para finalizar a demonstração da primeira parte do teorema é suficiente provarmos que

$$J(t_+ u^+ + t_- u^-) = c_\infty. \quad (3.57)$$

Para isso, basta notar que da definição de c_∞ e de (3.49)

$$\begin{aligned} c_\infty & \leq J(t_+ u^+ + t_- u^-) \\ & = J(t_+ u^+ + t_- u^-) - \frac{1}{4} J'(t_+ u^+ + t_- u^-)(t_+ u^+ + t_- u^-) \\ & = \frac{1}{2} \widehat{M}(t_+^2 \|u^+\|^2 + t_-^2 \|u^-\|^2) - \frac{1}{4} M(t_+^2 \|u^+\|^2 + t_-^2 \|u^-\|^2)(t_+^2 \|u^+\|^2 + t_-^2 \|u^-\|^2) \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \left[\frac{1}{4} f(t_+ u^+ + t_- u^-)(t_+ u^+ + t_- u^-) - F(t_+ u^+ + t_- u^-) \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

De (3.50), (M_2'') (ver Lema 1.0.3), (f_3') e (3.58), resulta que

$$\begin{aligned} c_\infty & \leq J(t_+ u^+ + t_- u^-) \\ & \leq \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|^2) - \frac{1}{4} M(\|u\|^2) \|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \left[\frac{1}{4} f(u)(u) - F(u) \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

De (3.59), (3.48), (M_2'') , (3.51), (3.52) e do Lema de Fatou

$$\begin{aligned}
c_\infty &\leq J(t_+u^+ + t_-u^-) \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{4} M(\|u_n\|^2) \|u_n\|^2 \right] \\
&\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \left[\frac{1}{4} f(u_n)(u_n) - F(u_n) \right] \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[J(u_n) - \frac{1}{4} J'(u_n)u_n \right] \\
&= c_\infty.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

a desigualdade em (3.60) prova (3.57).

Parte 2: O ponto de mínimo encontrado é ponto crítico de J .

Suponhamos por contradição que $J'(t_+u^+ + t_-u^-) \neq 0$. Por continuidade, existem $\delta, \mu > 0$ tais que

$$\mu \leq \|J'(v)\|_*, \text{ sempre que } \|v - (t_+u^+ + t_-u^-)\| \leq 3\delta. \tag{3.61}$$

Definamos $D = [t_+/2, 3t_+/2] \times [t_-/2, 3t_-/2]$ e $g : D \rightarrow E^\pm$ por $g(t, s) = tu^+ + su^-$. Segue-se, dos Lemas 3.2.4, 3.2.5 e 3.2.6, que $J(g(t, s)) = c_\infty$ se $t = t_+$ e $s = t_-$, e $J(g(t, s)) < c_\infty$ nos demais pontos de D .

Assim, temos que

$$\beta := \max_{(t,s) \in \partial D} J(g(t, s)) < c_\infty. \tag{3.62}$$

Segue de [[76], Lemma 2.3], com $S = B_\delta(t_+u^+ + t_-u^-)$ e $c = c_\infty$, que escolhendo $\varepsilon = \min \left\{ \frac{c_\infty - \beta}{4}, \frac{\mu\delta}{8} \right\}$, existe uma deformação $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$ tal que

- a) $\eta(t, v) = v$ se $v \notin J^{-1}([c_\infty - 2\varepsilon, c_\infty + 2\varepsilon])$,
- b) $J(\eta(1, v)) \leq c_\infty - \varepsilon$ para cada $v \in E$ com $\|v - (t_+u^+ + t_-u^-)\| \leq \delta$ e $J(v) \leq c_\infty + \varepsilon$.
- c) $J(\eta(1, v)) \leq J(v)$ para todo $v \in E$.

De b) e c) concluímos que

$$\max_{(t,s) \in D} J(\eta(1, g(t, s))) < c_\infty. \tag{3.63}$$

Para concluir a demonstração do Teorema 3.1.1 é suficientemente provarmos que

$$\eta(1, g(D)) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset, \quad (3.64)$$

pois, devido a definição de c_∞ , (3.64) contradiz (3.63).

Para isso, definamos as aplicações $h(t, s) = \eta(1, g(t, s))$,

$$\psi_0(t, s) = (J'(g(t, t_-))tu^+, J'(g(t_+, s))su^-)$$

e

$$\psi_1(t, s) = \left(\frac{1}{t} J'(h(t, t_-))h(t, t_-)^+, \frac{1}{s} J'(h(t_+, s))h(t_+, s)^- \right).$$

Do Lema 3.2.7, temos que

$$J'(g(t, t_-))tu^+ \text{ e } J'(g(t_+, s))su^- > 0,$$

respectivamente, para $t \in (0, t_+)$ e $s \in (0, t_-)$, e

$$J'(g(t, t_-))tu^+ \text{ e } J'(g(t_+, s))su^- < 0,$$

respectivamente, para $t \in (t_+, \infty)$ e $s \in (t_-, \infty)$.

Segue-se da fórmula do produto para o grau de Brouwer (ver Lema 3.0.1(viii)) que $\deg(\psi_0, D, 0) = 1$.

Por outro lado, de (3.62), temos que

$$\begin{aligned} J(g(t, s)) &\leq \beta \\ &< \frac{(\beta + c_\infty)}{2} \\ &= c_\infty - 2 \left(\frac{c_\infty - \beta}{4} \right) \\ &\leq c_\infty - 2\varepsilon, \quad \forall (t, s) \in \partial D. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Segue de (3.65) e de a) que $g = h$ sobre ∂D . Sendo assim, $\psi_1 = \psi_0$ sobre ∂D e, do Lema 3.0.1(x), temos

$$\deg(\psi_1, D, 0) = \deg(\psi_0, D, 0) = 1. \quad (3.66)$$

Mostrando que $\psi_1(s, t) = 0$ para algum $(s, t) \in D$, isto é,

$$\eta(1, g(s, t)) = h(s, t) \in \mathcal{M}.$$

Portanto $u_0 := t_+u^+ + t_-u^-$ é ponto crítico de J . ■

Demonstração do resultado de multiplicidade do Teorema 3.1.1:

Segue-se de (3.13) e (3.38) que o funcional par Ψ é limitado inferiormente sobre S . Segue das Proposições 3.2.2 e 3.2.3 que Ψ verifica a condição Palais-Smale sobre S . Segue-se da Proposição 3.2.3 e de [66] que J admite infinitos pontos críticos. ■

Apêndice A

Sobre as hipóteses

Neste apêndice faremos algumas considerações acerca das hipóteses impostas sobre as funções M e f ao longo da tese. Nosso principal objetivo é esclarecer ao leitor as consequências de tais hipóteses e dar exemplos de funções que as satisfazem.

1.0.1 Consequências e comparações

Para maior comodidade do leitor, enunciaremos cada uma das hipóteses que serão consideradas nos lemas seguintes (mesmo que algumas delas já tenham sido enunciadas). Em tudo que segue, supomos $M : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas.

(M_1) M é uma função não-decrescente.

(M_2) Existe $m_0 > 0$ tal que a aplicação

$$t \mapsto \frac{[M(t) - m_0]}{t}$$

é não-crescente.

(M_3) Existe $m_0 > 0$ tal que

$$\frac{M(t_1)}{t_1} - \frac{M(t_2)}{t_2} \leq m_0 \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right),$$

para quaisquer $t_1 > t_2 > 0$.

(M'_2) Existe $m_0 > 0$ tal que

$$M(t) \geq m_0, \forall t \geq 0.$$

(M''_2) A aplicação

$$t \mapsto \frac{M(t)}{t}$$

é decrescente.

(f_1)

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t^3} = 0.$$

(f_2) Existe $q \in (4, 6)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = 0.$$

(f_3) Existe $\theta \in (4, 6)$ tal que

$$0 < \theta F(t) \leq f(t)t, \forall t > 0.$$

(f_4) A aplicação

$$t \mapsto \frac{f(t)}{t^3}$$

é não-decrescente em $(0, \infty)$.

(f_5) f é uma função localmente Lipschitz-contínua em $(0, +\infty)$.

(f'_1)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t^3} = 0, \text{ se ocorre (3.2) ou (3.3), para algum } p \in (2, 4],$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-1}} = 0, \text{ se (3.3) ocorre para algum } p \in (4, 6).$$

(f'_2)

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^5} = 0.$$

(f'_3)

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{t^4} = +\infty.$$

(f'_4) A aplicação

$$t \mapsto \frac{f(t)}{|t|^3}$$

é não-decrescente em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lema 1.0.1 (i) A hipótese (M_2) é equivalente a hipótese (M_3) .

(ii) Se (M_2) ocorre, então vale (M_2'') . Além disso, se vale (M_2'') então existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$M(t) \leq C_1 t + C_2, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração: (i) Note que (M_2) ocorre se, e somente, se

$$\frac{M(t_1) - m_0}{t_1} \leq \frac{M(t_2) - m_0}{t_2},$$

sempre que $t_1 \geq t_2$. Mas isso é equivalente a,

$$\frac{M(t_1)}{t_1} - \frac{M(t_2)}{t_2} \leq m_0 \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right),$$

sempre que $t_1 \geq t_2$.

(ii) É uma consequência imediata de (i) que a aplicação $t \mapsto M(t)/t$ é decrescente. Sendo assim,

$$M(t) \leq M(1)t, \quad \forall t \geq 1.$$

Por outro lado, sendo M contínua, existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que

$$M(t_0) = \max_{t \in [0, 1]} M(t).$$

Escolhendo $C_1 = M(1)$ e $C_2 = M(t_0)$, obtemos

$$M(t) \leq C_1 t + C_2, \quad \forall t \geq 0.$$

■

Lema 1.0.2 (i) Se (M_1) ocorre, então

$$\widehat{M}(t) \leq M(t)t, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) Se (M_2) ocorre, então

$$\frac{1}{2}[M(t) + m_0]t \leq \widehat{M}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

(iii) Se (M_2) ocorre, então

$$\frac{1}{4}m_0t \leq \frac{1}{2}\widehat{M}(t) - \frac{1}{4}M(t)t, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração: (i) Segue de (M_1) que

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds \leq M(t) \int_0^t ds = M(t)t, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) Por outro lado, de (M_2) e do Lema 1.0.1(i), temos

$$\begin{aligned} \widehat{M}(t) &= \int_0^t \frac{M(s)}{s} s ds \\ &\geq \int_0^t \left[\frac{M(t)}{t} + m_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t} \right) \right] s ds \\ &= \frac{1}{2}[M(t) + m_0]t, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Mostrando que

$$\frac{1}{2}[M(t) + m_0]t \leq \widehat{M}(t), \quad \forall t > 0.$$

Uma vez que ocorre a igualdade quando $t = 0$, a prova está completa.

(iii) Este ítem é uma consequência direta do ítem anterior. ■

Observação 1.0.1 *Uma consequência direta dos itens (i) e (ii) do lema anterior é que as hipóteses (M_1) e (M_2) combinadas implicam na hipótese (M'_2) .*

Observação 1.0.2 *Argumentando exatamente como na demonstração do ítem (ii) do lema anterior, podemos provar que (M''_2) implica em*

$$\frac{1}{2}M(t)t \leq \widehat{M}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Lema 1.0.3 *Se vale a hipótese (M''_2) então a aplicação*

$$t \mapsto \frac{1}{2}\widehat{M}(t) - \frac{1}{4}M(t)t$$

é crescente.

Demonstração: Basta notar que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\widehat{M}(t_1) - \frac{1}{4}M(t_1)t_1 &= \frac{1}{2}\widehat{M}(t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_2}^{t_1} \frac{M(s)}{s} s ds - \frac{1}{4}M(t_1)t_1 \\
&\geq \frac{1}{2}\widehat{M}(t_2) + \frac{1}{2} \frac{M(t_1)}{t_1} \int_{t_2}^{t_1} s ds - \frac{1}{4}M(t_1)t_1 \\
&= \frac{1}{2}\widehat{M}(t_2) + \frac{M(t_1)}{t_1} \frac{(t_1^2 - t_2^2)}{4} - \frac{1}{4}M(t_1)t_1 \\
&= \frac{1}{2}\widehat{M}(t_2) - \frac{1}{4} \frac{M(t_1)}{t_1} t_2^2 \\
&> \frac{1}{2}\widehat{M}(t_2) - \frac{1}{4}M(t_2)t_2,
\end{aligned}$$

sempre que $t_1 > t_2$, onde nas duas desigualdades usamos (M_2'') . ■

Lema 1.0.4 (i) Se vale a hipótese (M_1) então

$$\widehat{M}(t+s) \geq \widehat{M}(t) + \widehat{M}(s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

(ii) Se vale (M_2'') , então para cada $a \geq 0$ fixado, a aplicação

$$t \mapsto \frac{M(t+a)}{t}$$

é decrescente.

Demonstração: (i) Note que

$$\widehat{M}(t+s) = \int_0^{t+s} M(r) dr = \widehat{M}(t) + \int_t^{t+s} M(r) dr.$$

Considerando a mudança de variável $r = u + t$, obtemos

$$\widehat{M}(t+s) = \widehat{M}(t) + \int_0^s M(u+t) du.$$

De (M_1) , segue que o resultado.

(ii) Sejam $t_1 > t_2 > 0$. Temos que

$$\frac{M(t_1+a)}{t_1} = \frac{M(t_1+a)}{(t_1+a)} \frac{(t_1+a)}{t_1}.$$

De (M_2'') , segue-se que

$$\frac{M(t_1 + a)}{t_1} < \frac{M(t_2 + a)}{(t_2 + a)} \frac{(t_1 + a)}{t_1} = M(t_2 + a) \frac{(t_1 + a)}{t_1(t_2 + a)}.$$

Desde que $t_1 > t_2$, temos

$$\frac{(t_1 + a)}{t_1(t_2 + a)} < \frac{1}{t_2}.$$

A prova está completa. ■

Lema 1.0.5 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f = 0$ em $(-\infty, 0]$.*

(i) *Se valem as hipóteses (f_1) e (f_2) então, para cada $\xi > 0$ dado, existe $C_\xi > 0$ tal que*

$$f(t) \leq \xi t^3 + C_\xi t^{q-1}, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) *Se (f_3) ocorre, então existem constantes positivas C_3 e C_4 , tais que*

$$F(t) \geq C_3 t^\theta - C_4, \quad \forall t \geq 0.$$

(iii) *Se (f_4) ocorre, então a aplicação*

$$t \mapsto \frac{1}{4} f(t)t - F(t)$$

é não-decrescente.

Demonstração:

(i) De (f_1) , para cada $\xi > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(t) \leq \xi t^3, \quad \forall t \in (0, \delta). \tag{A.1}$$

Por outro lado, de (f_2) , existe $R > 0$ tal que

$$f(t) \leq \xi t^{q-1}, \quad \forall t \geq R. \tag{A.2}$$

Sem perda de generalidade podemos considerar $\delta \leq R$. Sendo f contínua, existe

$$\alpha := \max_{t \in [\delta, R]} f(t). \tag{A.3}$$

Tomemos $C > 1$ de modo que

$$\alpha \leq \xi C \delta^{q-1} \quad (\text{A.4})$$

e definamos $C_\xi := \xi C$.

O resultado segue de (A.1), (A.2), (A.3) e (A.4).

(ii) De (f_3) , obtemos

$$0 \leq \frac{d}{dt}(\ln t^\theta) \leq \frac{d}{dt}(\ln F(t)), \quad \forall t > 0.$$

Integrando a partir de $\xi > 0$, usando o Teorema fundamental do cálculo e propriedades de logaritmo, obtemos

$$\ln \left(\frac{t^\theta}{\xi^\theta} \right) \leq \ln \left(\frac{F(t)}{F(\xi)} \right), \quad \forall t > 0.$$

Desde que a função logaritmo é crescente, segue que

$$F(t) \geq \left(\frac{F(\xi)}{\xi^\theta} \right) t^\theta, \quad \forall t \geq \xi. \quad (\text{A.5})$$

Definindo $C_3 := F(\xi)/\xi^\theta$ e $C_4 := F(\xi)$, o resultado segue de (A.5).

(iii) Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}f(t_1)t_1 - F(t_1) &= \frac{1}{4}f(t_1)t_1 - F(t_2) - \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{f(s)}{s^3} \right] s^3 ds \\ &\geq \frac{1}{4}f(t_1)t_1 - F(t_2) - \frac{f(t_1)}{t_1^3} \int_{t_2}^{t_1} s^3 ds \\ &= \frac{1}{4}f(t_1)t_1 - F(t_2) - \frac{f(t_1)}{t_1^3} \frac{(t_1^4 - t_2^4)}{4} \\ &= \frac{f(t_1)}{t_1^3} \frac{t_2^4}{4} - F(t_2) \\ &\geq \frac{1}{4}f(t_2)t_2 - F(t_2), \end{aligned}$$

sempre que $t_1 \geq t_2$, onde usamos (f_4) nas duas desigualdades. ■

Lema 1.0.6 (i) Se vale a hipótese (f'_1) , então $f(0) = 0$. Em adição, se vale (f'_4) então $f < 0$ em $(-\infty, 0)$ e $f > 0$ em $(0, \infty)$. Além disso, $F(t) = \int_0^t f(s)ds \leq (1/4)f(t)t$, para todo $t \in (0, \infty)$ e $F(t) \geq (1/4)f(t)t$, para todo $t \in (-\infty, 0)$.

(ii) Se valem as hipóteses (f'_1) e (f'_2) então, para cada $\xi > 0$ dado, existe $C_\xi > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \xi|t| + C_\xi|t|^5, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{se (3.2) ocorre,}$$

e

$$|f(t)| \leq \xi|t|^{p-1} + C_\xi|t|^5, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{se (3.3) ocorre.}$$

(iii) Se (f'_3) ocorre, então existem constantes positivas C_3 e C_4 , tais que

$$F(t) \geq C_3t^4 - C_4, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(iv) Se (f'_4) ocorre, então a aplicação

$$t \mapsto \frac{1}{4}f(t)t - F(t)$$

é não-decrescente, se $t \geq 0$, e não-crescente, se $t < 0$.

Demonstração:

(i) Para mostrar que $f(0) = 0$, basta usar a continuidade de f e a identidade $f(t) = (f(t)/t^\alpha)t^\alpha$, onde $\alpha = 3$ ou $\alpha = p - 1$. Por outro lado, por (f'_4) temos que $f(t)/t^3$ é não-decrescente em $(0, \infty)$ e não-crescente em $(-\infty, 0)$. Tal fato, juntamente com (f'_1) nos permite concluir que $f > 0$ em $(0, \infty)$ e $f < 0$ em $(-\infty, 0)$. Finalmente, para cada $t > 0$, segue de (f'_4) que

$$F(t) = \int_0^t (f(s)/s^3)s^3 ds \leq (f(t)/t^3) \int_0^t s^3 ds = (f(t)/t^3)t^4/4 = (1/4)f(t)t.$$

De modo análogo, vemos que $(1/4)f(t)t \leq F(t)$ quando $t < 0$.

(ii) e (iv) Basta argumentar de modo análogo ao lema anterior.

(iii) De (f'_3) , segue que para cada $R_1 > 0$ dado, existe $R_2 > 0$ tal que

$$F(t) \geq R_1t^4, \quad \text{se } |t| \geq R_2. \quad (\text{A.6})$$

Definindo $C_3 := R_1$, $C_4 := R_1R_2^4$ e usando (A.6), segue o resultado. \blacksquare

Observação 1.0.3 Uma consequência direta do ítem (i) do lema anterior é que $F(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, de (A.5), vemos que (f_4) implica em (f'_4) .

1.0.2 Exemplos

Um típico exemplo de função satisfazendo as hipóteses (M_1) e (M_2) é dado por

$$M(t) = m_0 + bt,$$

com $m_0 > 0$ e $b \geq 0$.

Mais geralmente, qualquer função da forma

$$M(t) = m_0 + bt + \sum_{i=1}^m b_i t^{\gamma_i},$$

com $b_i \geq 0$ e $\gamma_i \in (0, 1)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, satisfaz as hipóteses $(M_1) - (M_2)$.

Outro exemplo de função satisfazendo as hipóteses mencionadas é

$$M(t) = m_0 + \ln(1 + t).$$

Agora, apresentaremos um exemplo de função contínua não-diferenciável satisfazendo as hipóteses (M_1) e (M_2) . Sejam m_0, b_0, b_1 e t_0 constantes positivas tais que $b_0 \neq b_1$ e $t_0 < m_0/(b_1 - b_0)$, se $b_0 < b_1$. Definimos a função contínua

$$M(t) = \begin{cases} 2m_0 + b_0 t, & \text{se } 0 \leq t \leq t_0 \\ 2m_0 + (b_0 - b_1)t_0 + b_1 t, & \text{se } t_0 \leq t \end{cases}$$

Sendo $b_0 \neq b_1$, temos que M é não-diferenciável em t_0 e satisfaz as hipóteses mencionadas.

O próximo exemplo confirma o fato de que na presença de (M_1) , a hipótese (M_2) é mais forte que as hipóteses (M'_2) e (M''_2) . Sejam m_0, b_0, b_1 e t_0 como no exemplo anterior, definindo

$$M(t) = \begin{cases} m_0 + b_0 t, & \text{se } 0 \leq t \leq t_0 \\ m_0 + (b_0 - b_1)t_0 + b_1 t, & \text{se } t_0 \leq t, \end{cases}$$

temos que M é contínua e satisfaz (M_1) , (M'_2) e (M''_2) , porém não satisfaz (M_2) .

No mesmo espírito dos dois últimos exemplos, não é difícil ver que podemos construir funções não-diferenciáveis em uma quantidade finita qualquer de pontos, satisfazendo as hipóteses (M_1) e (M_2) .

Um típico exemplo de função satisfazendo as hipóteses $(f_1) - (f_5)$ é dado por

$$f(t) = \sum_{i=1}^m c_i (t^+)^{q_i-1}$$

com $c_i \geq 0$ não todos nulos e $q_i \in [\theta, 6)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Por outro lado, um exemplo simples de função contínua não-diferenciável satisfazendo $(f_1) - (f_5)$ é

$$f(t) = \begin{cases} c(t^+)^{q_2-1}, & \text{se } |t| \leq 1 \\ c(t^+)^{q_1-1}, & \text{se } |t| \geq 1, \end{cases}$$

onde $c > 0$, $q_1, q_2 \in [\theta, 6)$ e $q_1 < q_2$.

Um exemplo de função satisfazendo, (f'_1) , (f'_2) , (f'_3) e (f'_4) é dado por

$$f(t) = t^3 g(|t|),$$

onde g é contínua, $g(0) = 0$, g é crescente, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)/t^a = \infty$, para algum $a \in (0, 1)$, e $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)/t^2 = 0$.

Apêndice B

Categoria relativa

Neste apêndice definimos brevemente a noção de categoria e enunciamos algumas de suas propriedades, de acordo com [76]. Veja também a obra original em [58].

2.0.3 Definições

Definição 2.0.1 Dizemos que um subconjunto fechado A de um espaço topológico X é contrátil em X , se existem $w \in X$ e uma aplicação contínua $h : [0, 1] \times A \rightarrow X$, tais que

$$h(0, u) = u \text{ e } h(1, u) = w, \forall u \in A.$$

Definição 2.0.2 Sejam A, B e Y subconjuntos fechados de um espaço topológico X . Dizemos que A é deformado em B preservando Y , e denotamos $A \prec_Y B$ em X , se $Y \subset A \cap B$ e existe $h : [0, 1] \times A \rightarrow X$ contínua tal que

- a) $h(0, u) = u, h(1, u) \in B, \forall u \in A$;
- b) $h(t, Y) \subset Y, \forall t \in [0, 1]$.

Definição 2.0.3 Sejam $Y \subset A$ subconjuntos fechados de um espaço topológico X . A categoria de A em X relativa a Y é o menor inteiro positivo n tal que existem $n + 1$ subconjuntos fechados A_0, A_1, \dots, A_n em X satisfazendo:

- a) $A = \bigcup_{j=0}^n A_j$;
- b) A_1, \dots, A_n são contráteis em X ;

c) $A_0 \prec_Y Y$ em X .

A categoria de A em X relativa a Y é denotada por $cat_{X,Y}(A)$.

Definição 2.0.4 *Seja A um subconjunto fechado de um espaço topológico X . A categoria de A em X é o menor inteiro positivo n para o qual existem subconjuntos A_1, \dots, A_n fechados e contráteis em X tais que $A = \bigcup_{j=0}^n A_j$. Denotamos $cat_X(A)$.*

Observação 2.0.4 *De acordo com a definição anterior, temos que*

$$cat_X(A) = cat_{X,\emptyset}(A).$$

2.0.4 Propriedades da categoria

Lema 2.0.7 *Sejam A, B, C e Y subconjuntos fechados de X tais que $Y \subset A \cap B \cap C$. Se $A \prec_Y B$ e $B \prec_Y C$ em X , então $A \prec_Y C$ em X .*

Demonstração: Pode ser encontrada em [76].

Proposição 2.0.1 *Sejam A, B e Y subconjuntos fechados de X tais que $Y \subset A$. A categoria relativa satisfaz as seguintes propriedades:*

- a) *Normalização:* $cat_{X,Y}(Y) = 0$;
- b) *Subaditividade:* $cat_{X,Y}(A \cup B) \leq cat_{X,Y}(A) + cat_X(B)$;
- c) *Monotonicidade:* Se $A \prec_Y B$, então $cat_{X,Y}(A) \leq cat_{X,Y}(B)$.

Demonstração: Pode ser encontrada em [76].

Definição 2.0.5 *Um espaço métrico X é um extensor absoluto de vizinhança, abreviadamente, um EAV, se para todo espaço métrico E , todo subconjunto fechado F de E e toda aplicação contínua $f : F \rightarrow X$, existe uma extensão contínua de f definida em uma vizinhança de F em E .*

Proposição 2.0.2 *Seja A um subconjunto fechado de um EAV X . Então, existe uma vizinhança fechada B de A em X tal que $cat_X(B) = cat_X(A)$.*

Demonstração: Pode ser encontrada em [76].

Proposição 2.0.3 *Sejam H , Ω^+ e Ω^- subconjuntos fechados de um espaço topológico X , com $\Omega^- \subset \Omega^+$. Sejam ainda*

$$\beta : H \rightarrow \Omega^+ \text{ e } \Psi : \Omega^- \rightarrow H,$$

aplicações contínuas, tais que $\beta \circ \Psi$ é homotópica a imersão

$$i : \Omega^- \rightarrow \Omega^+.$$

Então,

$$\text{cat}_H(H) \geq \text{cat}_{\Omega^+}(\Omega^-).$$

Demonstração: Pode ser encontrada em [27] e [28].

Apêndice C

Grau topológico de Brouwer

Nosso objetivo neste apêndice é definir de maneira sucinta o grau topológico de Brouwer e enunciar as propriedades utilizadas em nosso trabalho, faremos isso seguindo [29].

3.0.5 Caso regular

Sejam $\varphi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado e $N \geq 1$, e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S_\varphi)$. Definimos o grau de Brouwer de φ relativamente a Ω no ponto b , como sendo o número inteiro

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \begin{cases} \sum_{x \in \varphi^{-1}(b)} \operatorname{sgn} \operatorname{Jac}_\varphi(x) & \text{se } b \in \varphi(\Omega) \\ 0 & \text{se } b \notin \varphi(\bar{\Omega}), \end{cases}$$

onde $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \{-1, 1\}$ é a aplicação sinal, definida por

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ -1 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

e $\operatorname{Jac}_\varphi$ é o determinante jacobiano de φ .

Observação 3.0.5 *Usando o Teorema da função inversa vemos que a soma anterior é finita e portanto o grau está bem definido.*

Agora, caminharemos no sentido de dar uma definição de grau para funções menos regulares. Para esse propósito os próximos resultados são fundamentais.

Proposição 3.0.4 *Sejam $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S_\varphi)$. Então existe uma vizinhança U de φ em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que se $\psi \in U \cap C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, temos que*

- (i) $b \notin \psi(\partial\Omega) \cup \psi(S_\psi)$
- (ii) $\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\psi, \Omega, b)$.

Demonstração: Pode ser encontrada em [29].

Proposição 3.0.5 *Sejam $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b_1, b_2 \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S_\varphi)$. Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$, então*

$$\deg(\varphi, \Omega, b_1) = \deg(\varphi, \Omega, b_2).$$

Demonstração: Pode ser encontrada em [29].

3.0.6 Caso singular

Sejam $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Neste caso, temos

$$\rho := \text{dist}(b, \varphi(\partial\Omega)) > 0.$$

Escolhendo $0 < \gamma < \rho$, segue do Teorema de Sard que existe $b_1 \in B_\gamma(b)$ tal que

$$b_1 \notin \varphi(S_\varphi).$$

Logo,

$$b_1 \notin \varphi(\partial\Omega) \cap \varphi(S_\varphi).$$

Definimos então

$$\deg(\varphi, \Omega, b) := \deg(\varphi, \Omega, b_1). \tag{C.1}$$

Observação 3.0.6 *É uma consequência da Proposição 3.0.5 que o grau em (C.1) está bem definido.*

Lema 3.0.8 *Sejam $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Então existe uma vizinhança U de φ em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que se $\psi \in U \cap C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, temos que*

- (i) $b \notin \psi(\partial\Omega) \cup \psi(S_\psi)$
- (ii) $\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\psi, \Omega, b)$.

Demonstração: Pode ser encontrada em [29].

Lema 3.0.9 *Sejam $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b_1, b_2 \notin \varphi(\partial\Omega)$. Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$, então*

$$\deg(\varphi, \Omega, b_1) = \deg(\varphi, \Omega, b_2).$$

Demonstração: Pode ser encontrada em [29].

Lema 3.0.10 *Dados $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $\varepsilon > 0$, existe $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que*

$$\|\varphi - \psi\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} < \varepsilon.$$

Demonstração: Da compacidade de $\overline{\Omega}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon, \tag{C.2}$$

sempre que

$$|x - y| < \delta; x, y \in \overline{\Omega}.$$

Novamente, por compacidade, obtemos $x_1, \dots, x_k \in \overline{\Omega}$ tais que

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{n=1}^k B_\delta(x_n).$$

Para cada $n \in \{1, \dots, k\}$, definimos $\eta_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tal que $\text{supp}\eta_n = \overline{B}_\delta(x_n)$ e $\eta_n(x) > 0$ para todo $x \in B_\delta(x_n)$. Definimos ainda

$$\widehat{\eta} = \sum_{n=1}^k \eta_n.$$

Assim, $\widehat{\eta} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ com $U = \bigcup_{n=1}^k B_\delta(x_n)$ e

$$\widehat{\eta}(x) > 0, \forall x \in U.$$

Finalmente, definimos $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\psi \in C^\infty(U, \mathbb{R}^N)$, por

$$\psi(x) = \frac{1}{\widehat{\eta}(x)} \sum_{n=1}^k \eta_n(x) \varphi(x_n), \forall x \in U.$$

Segue de (C.2) que

$$\|\psi|_{\overline{\Omega}} - \varphi\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} < \varepsilon.$$

■

3.0.7 Caso geral

Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Assim,

$$\rho := \text{dist}(b, \varphi(\partial\Omega)) > 0.$$

Do Lema 3.0.10, existe $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|\varphi - \psi\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} < \rho/2. \quad (\text{C.3})$$

De (C.3), segue que

$$B_{\rho/2}(b) \subset \mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega).$$

Logo, faz sentido falar em $\text{deg}(\psi, \Omega, b)$. Definimos

$$\text{deg}(\varphi, \Omega, b) := \text{deg}(\psi, \Omega, b). \quad (\text{C.4})$$

Observação 3.0.7 *Segue de [29] que o grau em (C.4) está bem definido.*

3.0.8 Propriedades do grau de Brouwer

Teorema 3.0.1 *Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$.*

(i) *(Normalização)*

$$\text{deg}(Id, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & \text{se } b \in \Omega \\ 0 & \text{se } b \notin \overline{\Omega}, \end{cases}$$

(ii) *(Continuidade em relação a φ)*

Existe uma vizinhança U de φ em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que se $f \in U$ então

(a) $b \notin f(\partial\Omega)$

(b) $\text{deg}(f, \Omega, b) = \text{deg}(\varphi, \Omega, b)$.

(iii) *(Invariância por homotopia)*

Se $H \in C(\overline{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^N)$ e $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$, então

$$\text{deg}(H(\cdot, t), \Omega, b) = \text{cte}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

(iv) (Continuidade em relação ao ponto b)

Se b_1 e b estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$, então

$$\deg(\varphi, \Omega, b_1) = \deg(\varphi, \Omega, b).$$

(v)

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\varphi - b, \Omega, 0).$$

(vi) (Aditividade)

Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ com Ω_1 e Ω_2 abertos e disjuntos e $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2)$, então $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\varphi, \Omega_1, b) + \deg(\varphi, \Omega_2, b).$$

(vii) (Excisão)

Se $K \subset \bar{\Omega}$ é fechado e $b \notin \varphi(K) \cup \varphi(\partial\Omega)$, então

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\varphi, \Omega \setminus K, b).$$

(viii) (Produto cartesiano de funções)

Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ abertos limitados, $b_1 \notin \varphi_1(\partial\Omega_1)$ e $b_2 \notin \varphi_2(\partial\Omega_2)$. Então,

$$\deg((\varphi_1, \varphi_2), \Omega_1 \times \Omega_2, (b_1, b_2)) = \deg(\varphi_1, \Omega_1, b_1) \deg(\varphi_2, \Omega_2, b_2).$$

(ix) (Existência)

Se $\deg(\varphi, \Omega, b) \neq 0$ então $b \in \varphi(\Omega)$.

(x) (Dependência da fronteira)

Se $\psi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ com

$$\psi(x) = \varphi(x), \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

então

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\psi, \Omega, b).$$

Demonstração: Pode ser encontrada em [29].

Bibliografia

- [1] Aires, J.E.F. *Existência, regularidade e decaimento exponencial de solução para problemas elípticos semilineares em \mathbb{R}^N* . Master dissertation, UFPB, 1998.
- [2] Alves C.O. *Existence and Multiplicity of Solution for a Class of Quasilinear Equations*. *Advanced Nonlinear Studies*, 5(2005)73-87.
- [3] Alves C.O. *Multiplicity of multi-bump type nodal solutions for a class of elliptic problems in \mathbb{R}^N* . *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 34(2009)231-250.
- [4] Alves C.O., Corrêa F.J.S.A. and Figueiredo G.M. *On a class of nonlocal elliptic problems with critical growth*. *DEA*, 2(2010)409-417.
- [5] Alves C.O., Corrêa F.J.S.A. and Ma T.F. *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*. *Comput. Math. Appl.*, 49(2005)85-93.
- [6] Alves C.O. and Ding Y.H. *Multiplicity of positive solutions to a p -Laplacian equation involving critical nonlinearity*. *J. Math. Ann. Appl.*, 279(2003)508-521.
- [7] Alves C.O., do Ó J.M. and Miyagaki H.O. *On perturbations of a class of a periodic m -Laplacian equation with critical growth*. *Nonlinear Analysis*, 45(2001)849-863.
- [8] Alves C.O. and Figueiredo G.M. *Existence and multiplicity of positive solutions to the p -Laplacian equation in \mathbb{R}^N* . *Differential and Integral Equations*, v. 19, n. 2, (2006)143-162.

- [9] Alves C.O. and Figueiredo G.M. *Multiplicity of positive solutions for a quasilinear problem in \mathbb{R}^N via penalization method.* *adv. Non. studies*, v. 5, n.4, (2005)551-572.
- [10] Alves C.O. and Figueiredo G.M. *Nonlinear perturbations of a periodic Kirchhoff equation in \mathbb{R}^N .* *Non. Anal.*, 75(2012)2750-2759.
- [11] Alves C.O., Figueiredo G.M. and Furtado M.F. *Multiple solutions for a Nonlinear Schrödinger Equation with Magnetic Fields.* *Comm. PDE*, 36(2011)1-22.
- [12] Alves C.O. and Soares S.H.M. *Nodal solutions for singularly perturbed equations with critical exponential growth* *Journal of Differential Equations*, 234(2007)464 - 484.
- [13] Alves C.O. and Soares S.H.M. *On the location and profile of spike-layer nodal solutions to nonlinear Schrödinger equations.* *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 296(2004)563-577.
- [14] Alves C.O. and Souto A.S. *Existence of least energy nodal solution for a Schrödinger-Poisson system in bounded domains.* *To appear in ZAMP*.
- [15] Alves C.O. and Souto A.S. *Existence of solutions for a class of nonlinear Schrödinger equations with potential vanishing at infinity* *JDE*, 254(2013)1977-1991.
- [16] Ambrosetti A., Badiale M. and Cingolani S. *Semiclassical states of nonlinear Schrödinger equations with potentials.* *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 140(1997)285-300.
- [17] Ambrosetti A. , Malchiodi A. and Secchi S. *Multiplicity results for some nonlinear Schrödinger equations with potentials.* *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 159(2001)253-271.
- [18] Arosio A. *A geometrical nonlinear correction to the Timoshenko beam equation.* *Nonlinear Anal.*, 47(2001)729-740.

- [19] Arosio A. *On the nonlinear Timoshenko-Kirchhoff beam equation. Chin. Annal Math.*, 20(1999)495-506.
- [20] Azzollini A. *The elliptic Kirchhoff equation in \mathbb{R}^N perturbed by a local nonlinearity. Differential Integral Equations*, 25(2012)543-554.
- [21] Azzollini A., d'Avenia P. and Pomponio A. *Multiple critical points for a class of nonlinear functionals. preprint.*
- [22] Bahri A. and Coron J.M. *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: The effect of the topology of the domain Comm. Pure Appl. Math.*, 41(1988)253-294.
- [23] Bartsch T., Liu Z. and Weth T. *Sign changing solutions of superlinear Schrödinger equations. Comm. Partial Differential Equations*, 29(2004)25-42.
- [24] Bartsch T. and Wang Z.Q. *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on \mathbb{R}^N . Comm. Partial Differential Equations*, 20(1995)1725-1741.
- [25] Bartsch T. and Weth T. *A note on additional properties of sign changing solutions to superlinear elliptic equations. Topol. Meth. Nonl. Anal.*, 22(2003)1-14.
- [26] Bartsch T., Weth T. and Willem M. *Partial symmetry of least energy nodal solutions to some variational problems. Journal D'Analyse Mathématique*, 1(2005)1-18.
- [27] Benci V. and Cerami G. *Multiple positive solutions of some elliptic problems via the Morse theory and the domain topology. Calc. Var.*, 2(1994)29-48.
- [28] Benci V. and Cerami G. *The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems. Arch. Rational Mech. Anal.*, 114(1991)79-93.
- [29] Berestycki H. *Methodes topologiques et problèmes aux limites non linéaires. These présentée pour l'obtention du diplome de docteur de 3eme cycle, université de Paris VI.*

- [30] Berestycki H. and Nirenberg L. *On the Method of Moving Planes and the Sliding Method. Bol. Soc. Bras. Mat., v. 22, n. 1, (1991)1-37.*
- [31] Castro A., Cossio J. and Neuberger J.M. *A sign changing solution for a superlinear Dirichlet problem. Rocky Mountain J. Math., 27(1997)1041-1053.*
- [32] Chen C., Song H. and Xiu Z. *Multiple solutions for p-Kirchhoff equations in \mathbb{R}^N . Nonlinear Analysis, 86(2013)146-156.*
- [33] Chen S. and Li L. *Multiple solutions for the nonhomogeneous Kirchhoff equation on \mathbb{R}^N . Nonlinear Analysis: RWA, 14 (2013)1477-1486.*
- [34] Cheng B., Wu X. and Liu J. *Multiple solutions for a class of Kirchhoff type problems with concave nonlinearity. NoDEA , 19(2012)521-537.*
- [35] Cingolani S. and Lazzo M. *Multiple positive solutions to nonlinear Schrödinger equations with competing potential functions. JDE, 160(2000)118-138.*
- [36] Cingolani S. and Lazzo M. *Multiple semiclassical standing waves for a class of nonlinear Schrödinger equations. Topol. Methods. Nonlinear Anal., 10(1997)1-13.*
- [37] Clapp M. and Ding, Y.H. *Positive solutions of a Schrödinger equation with critical nonlinearity. ZAMP 55(2004)592-605.*
- [38] Correa F.J.S.A. and Figueiredo G.M. *On an elliptic equation of p-Kirchhoff type via variational methods. Bull. Austral. Math. Soc., 74(2006)263-277.*
- [39] Del Pino M. and Felmer P.L. *Local Mountain Pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains. Calc. Var., 4(1996)121-137.*
- [40] Ekeland, I. *On the variational principle. J. Math. Anal. Appl., 47(1974)324-353.*
- [41] Figueiredo G.M. *Existence of positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument. JMAA, v. 401, n. 2, (1974)324-353.*

- [42] Figueiredo G.M., Morales-Rodrigo C., Santos Júnior J.R. and Suárez A. *Study of a nonlinear Kirchhoff equation with non-homogeneous material. preprint.*
- [43] Figueiredo G.M. and Nascimento, R.G. *Existence of least energy nodal solution with two nodal domains for a Kirchhoff equation. preprint.*
- [44] Figueiredo G.M., Ikoma N. and Santos Júnior J.R. *Existence and concentration result for the Kirchhoff type equations with general nonlinearities. preprint.*
- [45] Figueiredo G.M. and Santos Junior J.R. *Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical or critical growth. DIE, v 25, n. 9/10, (2012)853-868.*
- [46] Floer A. and Weinstein A. *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential. Journal of Functional Analysis, 69(1986)397-408.*
- [47] Gidas B. and Spruck J. *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations. Comm. Partial Differential Equations 6(1981)883-901.*
- [48] Gilbarg D. and Trudinger N.S. *Elliptic partial differential equations of second order. Springer-Verlag, 1983.*
- [49] He X. and Zou W. *Existence and concentration of positive solutions for a Kirchhoff equation in \mathbb{R}^3 . JDE, 252(2012)1813-1834.*
- [50] He Y., Li G. and Peng S. *Concentrating bound states for Kirchhoff type problems in \mathbb{R}^3 involving critical Sobolev exponents. preprint.*
- [51] Jim J. and Wu X. *Infinitely many radial solutions for Kirchhoff type problems in \mathbb{R}^N . J. Math. Anal. Appl., 369(2010)564-574.*
- [52] Kirchhoff G. *Mechanik, Teubner, Leipzig, 1883.*
- [53] Li Y., Li F. and Shi J. *Existence of a positive solution to Kirchhoff type problems without compactness conditions. JDE, 253(2012)2285-2294.*

- [54] Liang S. and Shi S. *Soliton solutions to Kirchhoff type problems involving the critical growth in \mathbb{R}^N* . *Nonlinear Analysis*, 81(2013)31-41.
- [55] Limaco J.F. and Aداuto L.M. *Vibrations of elastic membranes with moving boundaries*. *Nonlinear Analysis* 45(2001)363-382.
- [56] Lions J.L. *On some questions in boundary value problems of mathematical physics*. *International Symposium on Continuum, Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro(1977)*, *Mathematics Studies, North-Holland, Amsterdam*, 30(1978)284-346.
- [57] Liu Z. and Wang Z.Q. *On the Ambrosetti-Rabinowitz superlinear condition*. *Adv. Nonl. Study*, 4(2004)563-574.
- [58] Lusternik L. and Schnirelmann L. *Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnels*. *Hermann, Paris*, 1934.
- [59] Ma T.F. *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type*. *Nonlinear Anal.*, Volume 63, n. 5-7, (2005)1967-1977.
- [60] Ma T.F. and Rivera J.E.M. *Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem*. *Appl. Math. Lett.*, 16(2003)243-248.
- [61] Miranda C. *Un'osservazione su un teorema di Brouwer*. *Bol. Un. Mat. Ital.*, 3(1940)5-7.
- [62] Moser J. *A new proof de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13(1960)457-468.
- [63] Nascimento R.G. *Problemas elipticos não-locais do tipo p-Kirchhoff*. *Doct. dissertation, Unicamp*, 2008.
- [64] Nie J. and Wu X. *Existence and multiplicity of nontrivial solutions for Schrödinger-Kirchhoff equations with radial potential*. *Nonlinear Analysis*, 75(2012)3470-3479.

- [65] Pimenta, M.T.O. and Soares, S.H.M. *Existence and concentration of solutions for a class of biharmonic equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 390(2012)274-289.
- [66] Rabinowitz P.H. *Minimax methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. CBMS Reg. Conf. Series Math.* 65, Ame. Math. Soc., Providence, R.I. 1986.
- [67] Rabinowitz P.H. *On a class of nonlinear Schrodinger equations. Z. Angew Math. Phys.*, 43(1992)27-42.
- [68] Rey O. *A multiplicity result for a variational problem with lack of compactness. Nonlinear Analysis -TMA*, 13(1989)1241-1249.
- [69] Schrödinger E. *Quantisierung als Eigenwert-problem. I, II, Annalen der Physik* 79(1925)361-376, 489-527.
- [70] Schrödinger E. *Quantisierung als Eigenwert-problem. III, IV, Annalen der Physik* 80(1926)437-490, 81(1926)109-139.
- [71] Struwe M. *Three nontrivial solutions of anticoercive boundary value problems for the pseudo-Laplace operator. J. Reine Angew. Math.*, 325(1981)68-74.
- [72] Szulkin A. and Weth T. *The method of Nehari manifold, Handbook of Nonconvex Analysis and Applications.* , D.Y. Gao and D. Montreanu eds., International Press, Boston, (2010)597-632.
- [73] Wang J. , An T. and Zhang F. *Multiplicity and concentration of positive solutions for a class of quasilinear problems with critical growth. preprint.*
- [74] Wang J., Tian L. , Xu J. and Zhang F. *Multiplicity and concentration of positive solutions for a Kirchhoff type problem with critical growth. JDE*, 253(2012)2314-2351.
- [75] Wang X. *On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations. Communications in mathematical Physics*, 153(1993)229-244.
- [76] Willem M. *Minimax Theorems. Birkhauser*, 1996.

- [77] Wu X. *Existence of nontrivial solutions and high energy solutions for Schrödinger-Kirchhoff-type equations in \mathbb{R}^N* . *Nonlinear Analysis, RWA* 12(2011)1278-1287.