



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

**Estabilidade Geral para o Modelo de
Bresse e Taxa Ótima Polinomial para
Sistemas de Equações de Ondas**

Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

Belém

2013

Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

**Estabilidade Geral para o Modelo de Bresse e Taxa Ótima
Polinomial para Sistemas de Equações de Ondas**

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Doutorado em Matemática - UFPA, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

Co-orientador: **Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior**

Belém

2013

CORDEIRO, Sebastião Martins Siqueira Cordeiro, 1970-

Estabilidade Geral para o Modelo de Bresse e Taxa Ótima Polinomial para Sistemas de Equações de Ondas/(Sebastião Martins Siqueira Cordeiro); Orientador, Prof. Dr. Mauro de Lima Santos- Co-orientador, Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior- 2013.

133 f. il. 28 cm

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará. Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de Doutorado em Matemática. Belém, 2013.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Equações Diferenciais Hiperbólicas. 3. Equações de Ondas . 4. Semigrupo de Operadores. I. Título.

CDD 22. ed. 515.353

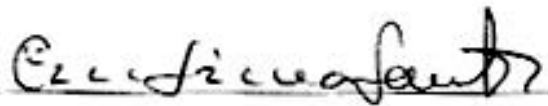
Estabilidade Geral para o Modelo de Bresse e Taxa Ótima Polinomial para Sistemas de Equações de Ondas

por

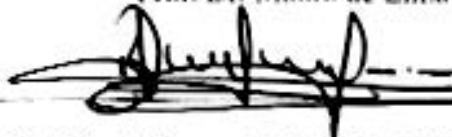
Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA - UFPA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA.

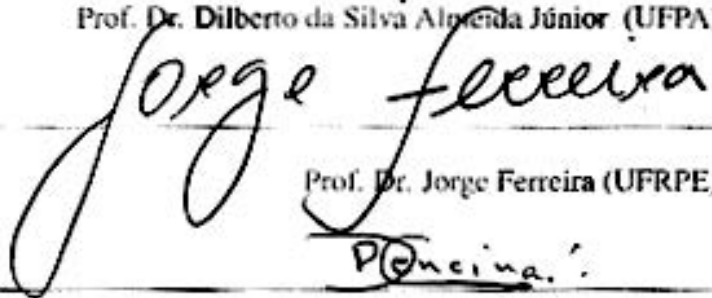
Aprovada em 20 de dezembro de 2013 por:



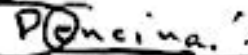
Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (UFPA)



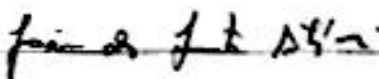
Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (UFPA)



Prof. Dr. Jorge Ferreira (UFRPE)



Prof. Dr. Duclival Carvalho Pereira (UEPA)



Prof. Dr. João dos Santos Protázio (UFPA)

*Às Mulheres da minha vida:
Maria Santíssima, Benedita, Cristiane e Beatriz.*

*“O homem que não tem olhos para contemplar o
Mistério, passará pela vida sem ter visto nada”*

Albert Einstein

Agradecimentos

Nesta minha jornada terrena, tenho encontrado muitas Pessoas e Instituições generosas, que contribuíram para que, eu chegasse a este estágio de formação em que me encontro hoje, por isso gostaria agradecer.

- A Deus-Trino (Pai, Filho e Espírito Santo), que têm me dado muita saúde, e aberto janelas de oportunidades, (quando as portas se achavam fechadas). Oportunidades Estas, que tenho agarrado e aproveitado com muita Fé e Dedicção, para Honra e Glória do Senhor.
- A Maria Santíssima, Minha Mãe, fonte de minha Inspiração e Fé, a quem tenho dedicado alguns instantes de meu tempo a contemplação de Sua Co-participação na realização do Plano da Salvação.
- A Meus Pais: José (in memória) e Benedita, de quem herdei a persistência aguerrida de sempre ir em busca de meus sonhos, mesmo quando ele parecia impossível de se realizar, e esta estranha mania de ter Fé na Vida.
- A Cristiane, Minha Amada Esposa, por acreditar na minha capacidade criativa, por ser minha Companheira de Jornada, a mulher maravilhosa que todo homem deseja e quer, a mãe carinhosa, por fazer parte de minha vida, por me amar e ser a principal responsável pela minha conversão.
- A Beatriz Minha Amada Filha, por ser a filha mais carinhosa que um pai pode ter, minha fonte de alegria, inspiração e paz.
- A meus Familiares, de sangue e consideração (irmã(o)s, sobrinho(a)s, cunhado(a) sogro(a)), por torcerem por mim e sempre me afagarem com palavras confortáveis. Que Deus Abençoe todos vocês.
- Ao meu Orientador Professor Mauro, por me indicar o caminho da pesquisa, caminho este que tem de ser trilhado com muita simplicidade e dedicação cotidiana, que pretendo seguir, até quando Deus permitir. Agradeço também pela atenção com que sempre tratou todos os seus orientandos, com muita humildade, honestidade, e respeitando a individualidade de cada um, pela amizade que construímos, pelas cervejas que tomamos às sextas na Big Bem, onde conversávamos longas horas, sobre futuros trabalhos. Espero possamos escrever muitos artigos juntos, e que estes sejam só os primeiros de muitos do nosso Grupo.

- Ao Professor Dilberto, por toda sua generosidade para comigo, sua amizade e sugestões que contribuíram muito para conclusão deste Trabalho.
- Ao Professor Ducival, pela sua presença amiga e transformadora em toda minha jornada acadêmica nesta Instituição de Ensino, desde a minha graduação passando pela especialização, mestrado e doutorado.
- Ao meu Orientador de Mestrado, Professor Jorge Ferreira, pelo incentivo e conselho que me fizeram despertar para pesquisa. Que Deus te Abençoe.
- Ao Professor João Batista Ribeiro, Diretor do IG, que nos cedeu sua sala gentilmente para que pudéssemos ter um espaço digno de se fazer pesquisa.
- Ao Corpo docente e técnico do PDM.
- Ao Corpo docente e técnico da FaCET e do Campus Universitário de Abaetetuba/(UFPA), pela liberação e pelo apoio.
- Aos amigos desta jornada de Formação do (PDM): Em especial O “Sexteto Fantástico” Anderson Campelo, Anderson Ramos, Gesson Mendes, Lindomar Ribeiro, Renato Lobato e Walter Martins, pelos sonhos e sofrimentos compartilhados.
- Aos amigos de minha cidade Barcarena, amigos de longas datas, que sempre acreditaram em mim, e na minha carreira no magistério, de uma maneira especial estão Antônio Miguel, Marcelão, Gilmar, Juarez, Raimundinho, Rosevaldo, Nazareno, Milson, Zezé, Leno, Walmir, Dercinho, J. Paulo, Jean, João Carlos, J. Rubens,...., etc, etc.
- A UFPA pela liberação, o CNPQ pelo apoio financeiro.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Resumo

Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Doutorado em Matemática

Estabilidade Geral para o Modelo de Bresse e Taxa Ótima Polinomial para Sistemas de Equações de Ondas

por Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

Neste Trabalho, estudamos dois modelos hiperbólicos.

Um sistema acoplado de Equações de Onda fracamente dissipativo, sendo a dissipação dada pelo efeito memória, onde mostramos que este sistema perde estabilidade exponencial, tendo desse modo estabilidade polinomial com taxa ótima.

O outro modelo é o sistema de vigas curvas governadas pelas hipóteses de Bresse, com damping não linear agindo sobre o ângulo de rotação e o deslocamento tangencial. Provamos taxa de decaimento Geral para este sistema.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais Hiperbólicas; Sistema de equações de ondas; Modelo de Bresse; Semigrupos de Operadores; Comportamento Assintótico; Taxa Ótima e Observabilidade.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Abstract

Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Doutorado em Matemática

General Stability for the model Bresse and Optimal Polynomial Rate for Wave Systems Equations.

by Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

In this work, we study two hyperbolic models.

First, we study a coupled system of weakly dissipative wave equations, with dissipation given by memory effect, where we showed that the system loses exponential stability. This way, the system decays polynomially with optimal rate.

The other model is the curved beam system governed by Bresse hypothesis, with non-linear damping acting on the rotation angle and the tangential displacement. We prove general decay rate for this system.

Keywords: Hyperbolic Partial differential equations; Systems of wave equations; Model Bresse; Semigroups of Operators; Asymptotic Behavior; Optimal Rate and Observability.

1	Introdução	1
1.1	Objetivo da Tese	8
1.2	Organização da Tese	9
2	Existência e Unicidade de Solução Forte de um Sistema de Equações de Ondas Acoplado com Memória	11
2.1	Hipótese Sobre o Núcleo g	13
2.2	A Energia do Modelo	14
2.3	O Cenário de Semigrupo	17
2.4	Espaços Funcionais	18
2.5	Perda de Estabilidade Exponencial	22
2.6	Estabilidade Polinomial e Taxa Ótima	26
3	Existência de Soluções para um Sistema de Bresse	33
3.1	Fundamentação Teórica	33
3.2	O Modelo a Ser Investigado	35
3.3	Hipóteses.	36
3.4	A Energia do Modelo	38
3.5	O Cenário de Semigrupo	41
3.6	Comportamento Assintótico	47
3.7	Resultado Principal de Comportamento Assintótico	48
4	Observabilidade Interna Indireta	91
4.1	Desigualdade Inversa	91

5	Trabalhos Futuros	109
A	Teoremas de Comportamento Assintótico	110
	Referências Bibliográficas	123

Lista de Figuras

3.1	O Arco circular	35
-----	------------------------	-------	----

CAPÍTULO 1

Introdução

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico para modelos matemáticos hiperbólicos dissipativos do tipo equações de onda com memória, vigas curvas governadas pelas hipóteses de Bresse, como também a observabilidade interna e indireta para este último modelo.

Na literatura, há muitos resultados associados à sistemas de equações de onda acoplado com amortecimento fraco agindo em apenas uma das equações. Podemos citar por exemplo o Trabalho de Fatiha Alabau-Bousoira do ano de 1999, sob título “Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés”[1], no qual a autora mostrou que a energia associada aos sistemas de equações de ondas acoplados a baixo, decaem fracamente de forma polinomial com taxa explicita. Os modelos estudados foram:

Estabilização na Fronteira de duas Eq. ondas acopladas com mesmas velocidades.

$$\begin{aligned}u_{tt} - \Delta u + \alpha v &= 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\v_{tt} - \Delta v + \alpha u &= 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\u = v = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_0 &= \Gamma_0 \times]0, \infty[, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u + l u_t &= 0; \quad v = 0, \quad \text{sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, \infty[, \end{aligned}$$

Estabilização na Fronteira de duas Placas de Kirchhoff.

$$\begin{aligned} u_{tt} + \Delta^2 u + \alpha v &= 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ v_{tt} + \Delta^2 v + \alpha u &= 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ u = v = 0 &= \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \quad \text{sobre } \Sigma = \Gamma \times]0, \infty[\end{aligned}$$

e

Estabilização na Fronteira de duas Eq. ondas acopladas com velocidades de propagações diferentes.

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_1 \Delta u + \alpha B v &= 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ v_{tt} - c_2 \Delta v + \alpha B^* u &= 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ u = v = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_0 &= \Gamma_0 \times]0, \infty[, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u + l u_t &= 0; \quad v = 0, \quad \text{sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, \infty[, \end{aligned}$$

Em 2004 no artigo “Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations” de Fatiha Alabau-Bousoira, P.Cannarsa e V. Komornik [2] os autores, mostraram uma taxa de decaimento para o seguinte sistema dissipativo abstrato acoplado utilizando as mesmas técnicas introduzidas em [1].

$$\begin{aligned} u_{tt} + A_1 u + u_t + \alpha v &= 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ v_{tt} + A_2 v + \alpha u &= 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ u = v = 0 \quad \text{sobre } \Sigma &= \Gamma \times]0, \infty[. \end{aligned}$$

Em 2007, M. L. Santos, Rocha, M. P. C., Gomes, S. C, no artigo “Polynomial Stability of a coupled system of waves equations weakly dissipative”[3], utilizando técnicas de semigrupo mostram existência unicidade e estabilidade polinomial para o seguinte sistema de equações de ondas acoplado com uma dissipação na primeira equação.

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v &= 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha u &= 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ u = v = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times]0, \infty[. \end{aligned}$$

Também em 2007 os autores R. G. C. Almeida e M. L. Santos, no artigo “Lack of exponential decay of a coupled system of wave equations with memory”[4], estudaram o seguinte sistema de equações de ondas com termo de memória:

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(s)\Delta u(t-s) ds + \alpha v = 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \quad (1.0.1)$$

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \quad (1.0.2)$$

$$u = v = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times]0, \infty[, \quad (1.0.3)$$

$$(u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)), \quad \text{em } \Omega \quad (1.0.4)$$

$$(u_t(x, 0), v_t(x, 0)) = (u_1(x), v_1(x)) \quad \text{em } \Omega, \quad (1.0.5)$$

onde Ω é um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n com fronteira Γ bem regular. Os autores provaram que a energia associada ao sistema decai polinomialmente e que esta taxa pode ser melhorada desde que os dados iniciais sejam bem regulares.

O modelo (1.0.1)–(1.0.5) é usado para descrever a evolução de um sistema que é constituído por duas membranas elásticas, sujeitas a uma força elástica que atrai uma membrana para a outra com coeficiente $\alpha > 0$. O sistema, pode modelar os seguintes fenômenos físicos: a polarização hereditária em dielétricos, dinâmica populacional ou fluxo em condutores reais. Tais modelos de equações diferenciais são influenciados pelos valores passados de uma ou mais variáveis em análise, daí o nome de sistemas de equações com memória. O principal problema neste tipo de equação está no seu carácter não-local, devido à presença do termo de memória (em geral o tempo da função de convolução desconhecida contra um adequado núcleo de memória).

Tendo em vista, que existem poucos resultados na literatura sobre o comportamento assintótico para o sistema de Bresse, o primeiro foi artigo de Liu e Rao de 2008 [5], “Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system,” dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - \kappa_0 l(\omega_x - l\varphi) - l\alpha \theta^1 = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T), \quad (1.0.6)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) - \alpha \theta_x^2 = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T), \quad (1.0.7)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0(\omega_x - l\varphi)_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + l\omega) - \alpha \theta_x^1 = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T), \quad (1.0.8)$$

$$\rho c \theta_t^1 - \theta_{xx}^1 + \alpha T_0(\omega_x - l\varphi)_t = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (1.0.9)$$

$$\rho c \theta_t^2 - \theta_{xx}^2 + \alpha T_0 \psi_x = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (1.0.10)$$

Neste artigo, os autores usaram dois mecanismos dissipativos, dados por duas temperaturas acopladas no ângulo de rotação e no deslocamento tangencial, usando técnicas de semigrupo, mostraram a estabilidade exponencial e polinomial em que a taxa de decaimento depende da condição de contorno Neumann-Neumann-Dirichelet e mostram que o sistema decai com uma taxa t^{-4} e para as condições de contorno Dirichelet a taxa é de t^{-8} . Estes resultados estão associados a propriedade de decaimento exponencial condicionado à igualdade entre as velocidades de propagações de ondas, isto é:

$$\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2} \text{ e } \kappa = \kappa_0 \quad (1.0.11)$$

Um problema importante no sistema de Bresse, é encontrar uma dissipação mínima pela qual as soluções decai uniformemente para zero quando o tempo vai para o infinito. Neste sentido em 2010, Fatori e Rivera [6], com o artigo “Rates of decay to thermoelastic Bresse system,” melhoraram o resultado do artigo de Liu e Rao [5], mostrando que em geral o modelo a baixo não é exponencialmente estável, e que não existe estabilidade polinomial com taxa que dependam das velocidades de propagação de ondas e dos dados iniciais. Além disso, introduzem uma condição necessária e suficiente para o decaimento polinomial,

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - \kappa_0 l(\omega_x - l\varphi) = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \quad (1.0.12)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) - \gamma\theta_x = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \quad (1.0.13)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0(\omega_x - l\varphi)_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \quad (1.0.14)$$

$$\theta_t^2 - k_1 \theta_{xx}^2 + m\psi_{xt} = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (1.0.15)$$

No artigo “Stability to weak dissipative Bresse system” em 2011, os autores Fatiha Alabau-Bousoira, Jaime Rivera e Dilberto da Silva Almeida Júnior [7], estudaram o seguinte problema com dissipação friccional:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - \kappa_0 l(\omega_x - l\varphi) = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \quad (1.0.16)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\psi_t = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \quad (1.0.17)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0(\omega_x - l\varphi)_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T). \quad (1.0.18)$$

Também 2011, no artigo “Bresse system with indefinite damping,” os autores Juan A. Polonimo, Rivera e Luci Fatori [8], chegaram a um excelente resultado, usando um amortecimento

indefinido atuando somente sobre o deslocamento. No artigo "Stabilisation faible interne locale de système élastique de Bresse" os autores Nahla Noun e Ali Wehbe, estenderam os resultados de [7], considerando o importante caso em que a lei de dissipação é distribuída apenas no deslocamento angular. Eles mostraram que o sistema é exponencialmente estável se as igualdades (1.0.11) for válidas. Veja em [9],

Com condições de fronteira do tipo Dirichelet, os autores mostraram que o sistema é exponencialmente estável, se as velocidades de propagação de ondas são iguais. Além disso eles mostraram que quando as velocidades de propagação são diferentes, o sistema não é exponencialmente estável, e neste caso provaram que a solução decai polinomialmente para zero, com taxas que podiam ser melhoradas, desde que os dados iniciais fossem mais regulares. Em 2012 no artigo "The optimal decay rate for a weak dissipative Bresse system", os autores Luci Harue Fatori e Rodrigo Nunes Monteiro encontraram taxa ótima para o modelo de [7], veja em [10].

Em 2013, no artigo "Decay rates for Bresse system with arbitrary nonlinear localized damping," os autores, Wenden Charles, J. A. Soriano, Flávio A. Falcão e J. H. Rodrigues, [11], consideraram o sistema:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - \kappa_0 l(\omega_x - l\varphi) + \alpha_1(x)g_1(\phi_t) = 0, \quad em \ (0, L) \times (0, T), \quad (1.0.19)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) + \alpha_2(x)g_2(\psi_t) = 0, \quad em \ (0, L) \times (0, T), \quad (1.0.20)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0(\omega_x - l\varphi)_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + l\omega) + \alpha_3(x)g_3(\omega_t) = 0, \quad em \ (0, L) \times (0, T), \quad (1.0.21)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \omega(0, t) = \omega(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (1.0.22)$$

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0(\cdot), \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1(\cdot); \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0(\cdot), \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1(\cdot);$$

$$\omega(\cdot, 0) = \omega_0(\cdot), \quad \omega_t(\cdot, 0) = \omega_1(\cdot), \quad \forall x \in (0, L), \quad (1.0.23)$$

e provaram sem levar em conta as hipóteses sobre as igualdades das velocidades de propagação de ondas, que a energia do sistema (1.0.19) – (1.0.21) decai com a seguinte taxa

$$E(t) \leq S \left(\frac{t}{T_0} - 1 \right), \quad \forall t > T_0$$

onde $S(t)$ é a solução da seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) =, \quad S(0) = E(0)$$

onde, q é dado em [8].

No livro, *Contrôlabilité exacte et stabilization de systémes distribues*, Vol. 1 e 2. de J. L. Lions [12], encontramos os primeiros resultados de observabilidade. Um fato, que não podemos deixar de notar, é que a observabilidade é uma consequência imediata do estudo de controlabilidade, que surgiu, a partir da análise da seguinte equação de ondas:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \times]0, T[, \\ u = 0 \text{ em } \Gamma, \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.0.24)$$

Aqui, Ω é um subconjunto aberto limitado do \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, com fronteira Γ suave. Ele mostrou que se $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$, então a equação (1.0.24) admite uma solução forte, e se $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, a solução é fraca, e a energia associada ao sistema (1.0.24) é definida por:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx$$

multiplicando (1.0.24) por u_t , mostrou que a energia era conservativa, isto é;

$$E(t) = E(0) \forall t \geq 0.$$

Estudando a controlabilidade exata interna, J. Lions conjecturou que, para todo $T > T_0$, onde T_0 é suficientemente grande, conhecendo as constante positivas C_1 e C_2 , a solução de (1.0.24) verifica as seguintes estimativas:

$$\int_0^T \int_{\omega} (|u_t|^2 + |u|^2) dx dt \leq c_1 E(0) \quad (1.0.25)$$

e

$$\int_0^T \int_{\omega} (|u_t|^2 + |u|^2) dx dt \geq c_2 E(0), \quad (1.0.26)$$

onde $\omega \subset \Omega$. Para chegar aos resultados acima, ele usou o método dos multiplicadores. Chamou

a estimativa (1.0.25) de desigualdade direta, e (1.0.26) de desigualdade indireta ou “desigualdade de Observabilidade.”

Na literatura, existem vários conceitos de Observabilidade, em [12] vol.1, J. L. Lions, introduziu três conceitos: Observabilidade Completa, parcial e simultânea. Por exemplo, se considerarmos a equação de ondas acopladas a baixo,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u + \alpha v = 0 \text{ em } \Omega \times]0, T[, \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 \text{ em } \Omega \times]0, T[, \\ u = v = 0 \text{ em } \Sigma = \Gamma \times]0, T[, \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1, v(0) = v_0, v_t(0) = v_1, \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.0.27)$$

A observabilidade completa:

$$\int_0^T |u_t|^2 + |v_t|^2 dx dt \geq c (|u^1|^2 + |\nabla u^0|^2 + |v^1|^2 + |\nabla v^0|^2), \quad (1.0.28)$$

A observabilidade parcial:

$$\int_0^T |u_t|^2 dt \geq c (|u^1|^2 + |\nabla u^0|^2), \quad (1.0.29)$$

A observabilidade simultânea:

$$\int_0^T |u_t + v_t|^2 dx dt \geq c (|u^1|^2 + |\nabla u^0|^2 + |v^1|^2 + |\nabla v^0|^2). \quad (1.0.30)$$

Em [12], vol. 2, J. Lions, utilizando o método dos multiplicadores, mostrou que as desigualdades de observabilidade completa e simultâneas, podem ser obtidas também no sistema de equação de ondas e Petrowsky, em que a constante α de acoplamento é suficientemente pequena. Em seguida propôs a seguinte conjectura. “Será que há controle exato para para acoplamento de qualquer parâmetro?” Tal conjectura teve uma resposta positiva quando V.Komornik e P. Loret em [13], provaram a observabilidade parcial em um sistema acoplado de equações de onda e Petrowsky, baseados no teorema clássico de Ingham em série de Fourier não-harmônica.

Associada à estabilidade indireta, (veja [14] e [15]) um quarto conceito de observabilidade indireta foi introduzido na literatura, que consiste em observar que a norma de alguns componentes da solução pode estimar todos os componentes das normas dos dados iniciais. Em [16], Fatiha Alabau-Bousoira considerou por exemplo, o sistema (1.0.27) e observou que a norma em $L^2(\Omega)$ e do traço da derivada normal de u em $\Gamma_1 \times]0, T[$. Mais precisamente, ela demonstrou o seguinte resultado:

Teorema 1.1. *Existe $\bar{\alpha}$, tal que para todo $0 < |\alpha| < \bar{\alpha}$ e existe $T_1 = T_1(\alpha) > 0$, tal que $T > T_1$ e $U^0 = (u^0, u^1, v^0, v^1) \in \mathcal{H} = (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L))^2$, tal que a solução (u, v) de (1.0.27) verifica*

$$\frac{C_1}{2} (|u^1|^2 + |\nabla u^0|^2) + \frac{C_1}{2} (\|v^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + |v^0|^2) \leq 2 \int_0^T \int_{\omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\nu dt, \quad (1.0.31)$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas que dependem de T e α . Mas se a solução de (1.0.27) verifica

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \times]0, T[,$$

então $u = v = 0$ em Ω .

1.1 Objetivo da Tese

Motivados pelos resultados acima exposto, nossa Tese tem por objetivo:

1) Analisar as questões relativas a falta de decaimento exponencial do sistema (1.0.1) – (1.0.5), onde nossa principal ferramenta será os resultados de estabilidade exponencial devido a Prüss [17].

2) Fornecer taxas de decaimentos precisas sobre um contexto mais geral para um sistema de Bresse com dois mecanismos dissipativos não lineares de atrito, levando em conta o crescimento arbitrário do feedback na origem. Usando o método utilizado pela primeira vez na literatura por Fatiha Alabau-Bousoira em [18], com as devidas adaptações ao nosso modelo, estabeleceremos uma fórmula semi explícita geral para a taxa de decaimento da energia quando as velocidades de propagação de ondas para as três equações são iguais, isto é quando (1.0.11), acontece.

Provaremos que a energia associada ao sistema satisfaz

$$E(t) \leq 2\beta_{E(0)} z^2(t) \frac{z(t)g'(z(t)) - g(z(t))}{z(t)g'(z(t)) + g(z(t))}, \quad \forall t \geq \frac{T_0}{H'(r_0^2)}, \quad (1.1.1)$$

onde z e q são dadas em [19] e [18], r_0 , $\beta_{E(0)}$ e T_0 são dados em (3.3), (3.7.111) e (3.7.117) respectivamente, assim temos,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0,$$

e a taxa de decaimento dada pela estimativa (1.1.1). Este resultado generaliza os resultados existentes na literatura para o sistema de Bresse.

3) Fornecer uma desigualdade de observabilidade interna e indireta, para um sistema de Bresse homogêneo.

1.2 Organização da Tese

Para o desenvolvimento desta tese, optamos por uma metodologia que nos parecia ser a mais didática possível. Por este motivo inserimos as definições e teoremas de análise matemática, na medida em que fossemos necessitar desenvolver as propriedades, por exemplo, de unicidades e estabilidade assintóticas dos modelos em estudos.

No Capítulo 2, estudamos a existência e unicidade de soluções como também nos propomos a analisar a falta de decaimento exponencial, o decaimento polinomial juntamente com sua taxa ótima, de um sistema de Equações Diferenciais de Onda, com mecanismo dissipativo do tipo memória. Para isto usamos os teoremas de Lummer-Phillips, Prüss, e Borichev-Tomilov.

No Capítulo 3, estabelecemos a existência e unicidade de soluções para o modelo de Bresse, com dissipação não lineares uma atuando na equação de deslocamento rotacional, e outra na deslocamento Tangencial. Usaremos o sentido de Soluções de V. Barbu, e o método de semi-grupo não linear, e para o comportamento assintótico, levaremos em conta a propriedade de igualdade das velocidades de propagação de ondas, usando técnicas multiplicativas.

No Capítulo 4, a partir das técnicas usadas para a demonstração do estabilidade exponencial no teorema (3.5, estabeleceremos uma desigualdade de Observabilidade interna e indireta.

No Capítulo 5, traçamos metas a ser atingidas, a partir de uma gama de resultados que não foram utilizados nesta tese, por falta de tempo, e de sedimentação das ideias. Tais metas denominamos de trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

Existência e Unicidade de Solução Forte de um Sistema de Equações de Ondas Acoplado com Memória

Neste capítulo, estudamos a existência e unicidade de soluções bem como o comportamento assintótico para o seguinte sistema acoplado de equações de onda:

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^{\infty} g(s)\Delta u(t-s) ds + \alpha v = 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \quad (2.0.1)$$

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \quad (2.0.2)$$

$$u = v = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times]0, \infty[, \quad (2.0.3)$$

$$(u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)), \quad \text{em } \Omega \quad (2.0.4)$$

$$(u_t(x, 0), v_t(x, 0)) = (u_1(x), v_1(x)) \quad \text{em } \Omega, \quad (2.0.5)$$

onde $\alpha > 0$.

Note que neste caso o operador gerado a partir do sistema acima não é autônomo e, portanto, não gera um semigrupo. Para transformar (2.0.1) – (2.0.5) num sistema autônomo, usaremos os argumentos de Dafermos [20] e M. Fabrizio [21], e introduziremos os espaços de memória,

isto é, considere:

$$\eta(x, t, s) = u(x, t) - u(x, t - s), \quad (2.0.6)$$

então, derivando em relação a t e depois em relação a s , obtemos:

$$\eta_t(x, t, s) = u_t(x, t) - u_t(x, t - s). \quad (2.0.7)$$

e

$$\eta_s(x, t, s) = u_s(x, t - s), \quad (2.0.8)$$

De (2.0.7) e (2.0.8), obtemos:

$$(\eta_t + \eta_s)(x, t, s) = u_t(x, t - s). \quad (2.0.9)$$

Note que de (2.0.6), $\eta(0) = 0$, para todo $t \geq 0$, que poderemos assumir como condição de contorno, enquanto que

$$\eta_t(x, 0, s) = u_t(x, 0) - u_t(x, -s) = u_1(x) - u_t(x, -s) := u(s) \quad (2.0.10)$$

onde $u(s)$ é chamado de história. De (2.0.6), obtemos também, a seguinte relação:

$$\Delta\eta(x, t, s) = \Delta u(x, t) - \Delta u(x, t - s). \quad (2.0.11)$$

Substituindo (2.0.11) em (2.0.1), obtemos:

$$u_{tt} - \Delta u \left(1 - \int_0^\infty g(\tau) d\tau\right) - \int_0^\infty g(\tau) \Delta\eta(\cdot, \tau) d\tau + \alpha v = 0. \quad (2.0.12)$$

Fazendo,

$$\beta_0 = 1 - \int_0^\infty g(\tau) d\tau > 0,$$

desde que,

$$\int_0^{\infty} g(\tau) d\tau > 1.$$

Agora, reescrevendo o sistema (2.0.1) – (2.0.5) obtemos:

$$u_{tt}(x, t) - \beta_0 \Delta u(x, t) - \int_0^{\infty} g(\tau) \Delta \eta(x, t, s) ds + \alpha v(x, t) = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.0.13)$$

$$v_{tt}(x, t) - \Delta v(x, t) + \alpha u(x, t) = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty), \quad (2.0.14)$$

$$\eta_t(x, t, s) + \eta_s(x, t, s) - u_t(x, t) = 0, \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.0.15)$$

$$u(x, t) = v(x, t) = \eta(x, t, s) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty), \quad \forall s, t \in (0, \infty) \quad (2.0.16)$$

$$(u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad \text{em } \Omega, \quad (2.0.17)$$

$$(u_t(x, 0), v_t(x, 0)) = (u_1(x), v_1(x)) \quad \text{em } \Omega, \quad (2.0.18)$$

$$\eta(x, 0, s) = u(x, 0) - u(x, -s), \quad \text{em } \Omega \times (\infty). \quad (2.0.19)$$

Observação 2.1. Para não carregar na notação, quando possível, omitiremos os argumentos (x, t) e (x, t, s) .

2.1 Hipótese Sobre o Núcleo g

Assumiremos as seguintes hipóteses sobre g , as mesmas usadas em [22]:

$$g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+), \quad g(t) > 0, \quad \exists q_0, q_1 > 0 : -q_0 g(t) \leq g'(t) \leq -q_1 g(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.1.1)$$

Observação 2.2. Note que estas hipóteses sobre o núcleo g é mais geral do que em [4].

2.2 A Energia do Modelo

O funcional energia do sistema (2.0.13) – (2.0.19), é dado por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ |u_t|^2 + |v_t|^2 + \beta_0 |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \alpha |uv|^2 + \int_0^{\infty} g(s) |\nabla \eta(\cdot, s)|^2 ds \right\} dx. \quad (2.2.1)$$

Temos a seguinte relacionada com $E(t)$.

Proposição 2.3. *A energia $E(t)$ associada ao problema (2.0.13) – (2.0.19) satisfaz a seguinte estimativa:*

$$E'(t) \leq -\frac{q_1}{2} \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} |\nabla \eta(x, s)|^2 ds dx. \quad (2.2.2)$$

Prova. De fato, a prova desta proposição é feita usando o método da energia. Multiplicamos as equações (2.0.13) e (2.0.14) por u_t e v_t , respectivamente e integramos em Ω .

Na equação (2.0.13) temos:

$$\int_{\Omega} \left\{ u_{tt}u_t - \beta_0 \Delta u u_t - \int_0^{\infty} g(\tau) \Delta \eta(\cdot, \tau) u_t d\tau + \alpha v u_t \right\} dx = 0, \quad (2.2.3)$$

daí segue que:

$$\int_{\Omega} u_{tt}u_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx, \quad (2.2.4)$$

$$-\beta_0 \int_{\Omega} \Delta u u_t dx = \beta_0 \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx = \frac{\beta_0}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \quad (2.2.5)$$

Temos também que:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \Delta \eta(\cdot, s) u_t ds; dx &= \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \nabla \eta(\cdot, s) \nabla u_t ds dt \\
 &= \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \nabla \eta(\cdot, s) \nabla (\eta_t(\cdot, s) + \eta_s(\cdot, s)) ds dx \\
 &= \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \nabla \eta(\cdot, s) \nabla \eta_t(\cdot, s) ds dx \\
 &+ \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \nabla \eta(\cdot, s) \nabla \eta_s(\cdot, s) ds dx,
 \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \Delta \eta(\cdot, s) u_t ds; dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} |\nabla \eta(\cdot, s)|^2 ds dx \\
 &- \frac{1}{2} \int_0^{\infty} g'(s) \int_{\Omega} |\nabla \eta(\cdot, s)|^2 ds dx. \quad (2.2.6)
 \end{aligned}$$

Substituindo (2.2.4) – (2.2.6) em (2.2.3), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{\beta_0}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} |\nabla \eta(\cdot, s)|^2 ds dx \\
 - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} g'(s) \int_{\Omega} |\nabla \eta(\cdot, s)|^2 ds dx + \int_{\Omega} \alpha v u_t dx = 0. \quad (2.2.7)
 \end{aligned}$$

Na equação (2.0.14) temos:

$$\int_{\Omega} (v_{tt} v_t - \Delta v v_t + \alpha v v_t) dx = 0, \quad (2.2.8)$$

daí temos:

$$\int_{\Omega} v_{tt} v_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v_t|^2 dx, \quad (2.2.9)$$

$$- \int_{\Omega} \Delta v v_t dx = \int_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx. \quad (2.2.10)$$

Substituindo (2.2.9) e (2.2.10) em (2.2.8), obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} \alpha u v_t dx = 0 \quad (2.2.11)$$

Somando as equações (2.2.11) e (2.2.7) e notando que:

$$\int_{\Omega} \alpha v u_t + \alpha u v_t dx = \int_{\Omega} \alpha (uv)_t dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \alpha (uv) dx,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v_t|^2 dx + \beta_0 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \\ & + 2 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \alpha (uv) dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} |\nabla \eta(\cdot, s)|^2 ds dx \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} g'(s) \int_{\Omega} |\nabla \eta(\cdot, s)|^2 ds dx \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

de (2.2.1), temos que

$$E'(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} g'(s) \int_{\Omega} |\nabla \eta(\cdot, s)|^2 ds dx$$

e usando as hipóteses sobre a função g , obtemos:

$$E'(t) \leq -\frac{q_1}{2} \int_0^\infty g(s) \int_\Omega |\nabla \eta(\cdot, s)|^2 ds dx \leq 0.$$

de onde segue,

$$E(t) \leq E(0), \forall t \geq 0. \quad (2.2.13)$$

O que nos leva a afirmar que o sistema em questão, é dissipativo, onde o funcional $E(t)$, é denominado a energia do modelo, o que conclui a demonstração. ■

2.3 O Cenário de Semigrupo

O sistema (2.0.13) – (2.0.19) pode ser reescrito na forma matricial. Para tanto, considere $U = (u, u_t, v, v_t, \eta)^T$, onde T indica a transposta do vetor U . Deste modelo o vetor U satisfaz o seguinte problema de Cauchy:

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U \quad (2.3.1)$$

$$U(0) = U_0, \quad (2.3.2)$$

onde $U_0 = (u_0, u_1, v_0, v_1, \eta_0)^T$ e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ corresponde ao operador diferencial, dado formalmente por:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \beta_0 \Delta & 0 & -\alpha I & 0 & \int_0^\infty g(s) ds \Delta \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -\alpha I & 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & -\mathcal{T}_s \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

onde \mathcal{T} esta definido por:

$$\mathcal{T}\eta = \eta_s, \quad \forall \eta \in D(\mathcal{T})$$

2.4 Espaços Funcionais

A partir da energia do sistema (2.0.13) – (2.0.19), denotamos por $L_g^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))$, o espaço de Hilbert com peso g e com valores no espaço $H_0^1(\Omega)$, isto é:

$$L_g^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)) = \left\{ f; \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \|\nabla f\|^2 dx ds < \infty \right\},$$

munido com o seguinte produto interno:

$$(f, h)_{L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))} = \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \nabla f(x, s) \cdot \nabla \overline{h(x, s)} dx ds.$$

Para dar uma formulação precisa do nosso problema de evolução, consideramos o seguinte espaço de Hilbert:

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L_g^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))$$

munido do seguinte produto interno:

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle &= \beta_0 \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla \overline{v_1} dx + \int_\Omega u_2 \overline{v_2} dx + \int_\Omega \nabla u_3 \cdot \nabla \overline{v_3} dx + \int_\Omega u_4 \overline{v_4} dx \\ &+ \alpha \int_\Omega (u_1 \overline{v_3} + u_3 \overline{v_1}) dx + \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \nabla u_5(x, s) \cdot \nabla \overline{v_5(x, s)} dx ds, \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

onde: $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)^T$, $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)^T \in \mathcal{H}$.

Aqui vamos considerar:

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &= \{(u, \varphi, v, \psi, \eta)^T \in \mathcal{H}; \beta_0 u - \int_0^\infty g(s) \eta(s) ds \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ &\varphi \in H_0^1(\Omega), v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \psi \in H_0^1(\Omega), \eta \in D(\mathcal{T})\} \end{aligned}$$

e

$$D(\mathcal{T}) = \{\eta \in L_g^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)); \eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)), \eta(0) = 0\}$$

onde, η_s é a derivada distribucional de η em relação a variável s .

Munidos destas informações preliminares, estamos em condições de enunciar o nosso teorema de existência e unicidade de soluções.

Teorema 2.4. *O operador \mathcal{A} gera um semigrupo C_0 -de contração $S(t)$ sobre \mathcal{H} . Então para todo dados iniciais $U_0 \in \mathcal{H}$, o problema (2.0.13) – (2.0.19) tem uma única solução fraca $U(t) \in C^0([0, \infty[, \mathcal{H})$. Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então $U(t)$ é solução forte de (2.0.13) – (2.0.19), isto é $U(t) \in C^1([0, \infty[, \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty[, D(\mathcal{A}))$.*

Prova. Por definição $D(\mathcal{A})$ è denso em \mathcal{H} . Agora para $U = (u, u_t, v, v_t, \eta)^T \in D(\mathcal{A})$ e usando o produto interno (2.4.1) temos

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A}U, U \rangle &= \beta_0 \int_{\Omega} \nabla u_t \cdot \nabla u \, dx + \int_{\Omega} (\beta_0 \Delta u - \alpha v + \int_0^{\infty} g(s) \Delta \eta(s) \, ds) u_t \, dx \\
 &+ \int_{\Omega} \nabla v_t \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (\Delta v - \alpha u) v_t \, dx + \alpha \int_{\Omega} (u_t v + u v_t) \, dx \\
 &+ \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \nabla (u_t - \eta_s(s)) \cdot \nabla \eta(s) \, dx \, ds \\
 &= \beta_0 \int_{\Omega} \nabla u_t \cdot \nabla u \, dx + \beta_0 \int_{\Omega} \Delta u u_t \, dx - \alpha \int_{\Omega} v u_t \, dx + \int_0^{\infty} g(s) \Delta \eta(s) u_t \, ds \, dx \\
 &+ \int_{\Omega} \nabla v_t \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \Delta v v_t \, dx - \alpha \int_{\Omega} u v_t \, dx + \alpha \int_{\Omega} u_t v \, dx + \alpha \int_{\Omega} v u_t \, dx \\
 &+ \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \nabla (u_t - \eta_s(s)) \cdot \nabla \eta(s) \, dx \, ds \\
 &= \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \Delta \eta(s) u_t \, ds \, dx + \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \nabla u_t \cdot \nabla \eta(s) \, dx \, ds \\
 &- \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \eta_s(s) \cdot \nabla \eta(s) \, dx \, ds \\
 &= - \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \nabla \eta_s(s) \cdot \nabla \eta(s) \, dx \, ds.
 \end{aligned}$$

Usando (2.1.1), obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U, U \rangle &= \frac{1}{2} \int_0^\infty g'(s) \int_\Omega |\nabla \eta(s)|^2 dx ds \\ &\leq -\frac{q_1}{2} \int_0^\infty g(s) \int_\Omega |\nabla \eta(s)|^2 dx ds \leq 0 \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

portanto, \mathcal{A} é um operador dissipativo.

Nossa intenção é usar o teorema de Lummer-Phillips, ver [23]. Para isto, devemos mostrar que $(I - \mathcal{A})$ é sobrejetivo. Então considere a equação resolvente:

$$(I - \mathcal{A})U = F$$

onde $U = (u, \varphi, v, \psi, \eta)^T$ e $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5)^T \in \mathcal{H}$. Deste modo, reescrevemos a equação resolvente em termos de suas componente, para obter o seguinte sistema:

$$u - \varphi = f^1, \quad (2.4.3)$$

$$\varphi - \beta_0 \Delta u + \alpha v - \int_0^\infty g(s) \Delta \eta(s) ds = f^2, \quad (2.4.4)$$

$$v - \psi = f^3, \quad (2.4.5)$$

$$\psi - \Delta v + \alpha u = f^4, \quad (2.4.6)$$

$$\eta - \varphi + \eta_s = f^5. \quad (2.4.7)$$

Multiplicando (2.4.7) por $e^{\tau-s}$, em seguida integrando de 0 até s ambos os lados da equação, obtemos:

$$\eta(\cdot, s) = \varphi(\cdot)(1 - e^{-s}) + \int_0^s e^{\tau-s} f^5(\cdot, \tau) d\tau. \quad (2.4.8)$$

Substituindo (2.4.3) e (2.4.8) em (2.4.4), obtemos:

$$u - \beta_g \Delta u + \alpha v = f^1 + f^2 + \int_0^\infty g(s) \left[(e^{-s} - 1) \Delta f^1 + \int_0^s e^{\tau-s} \Delta f^5(\tau) d\tau \right] ds, \quad (2.4.9)$$

onde:

$$\beta_g = \beta_0 + \int_0^{\infty} g(s)(1 - e^{-s}) ds.$$

Note que, β_g é uma constante positiva em virtude de (2.1.1). Além disso, é fácil ver que o lado direito de (2.4.9) está em $H^{-1}(\Omega)$.

Substituindo (2.4.5) em (2.4.6), obtemos:

$$v - \Delta v + \alpha u = f^3 + f^4. \quad (2.4.10)$$

Devemos mostrar que $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Para tanto, considere a seguinte forma bilinear:

$$\begin{aligned} a(\Phi_1, \Phi_2) &= \int_{\Omega} u_1 u_2 dx + \int_{\Omega} v_1 v_2 dx + \beta_g \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx \\ &+ \int_{\Omega} \nabla v_1 \cdot \nabla v_2 dx + \alpha \int_{\Omega} (v_1 u_2 + u_1 v_2) \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

onde, $\Phi_1 = (u_1, v_1)$ e $\Phi_2 = (u_2, v_2)$.

Note que, $a(\Phi_1, \Phi_2)$ é bilinear contínua e coerciva, portanto, pelo Lema de Lax-Milgram, ver [24] existe uma única solução

$$u, v \in H_0^1(\Omega).$$

De (2.4.3) e (2.4.5), temos $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$.

Agora de (2.4.8), obtemos:

$$\begin{aligned} \|\eta(\cdot, s)\|^2 &= \|\varphi(\cdot)(1 - e^{-s}) + \int_0^s e^{\tau-s} f^5(\cdot, \tau) d\tau\|^2 \\ &\leq \|\varphi(\cdot)(1 - e^{-s})\|^2 + \|\int_0^s e^{\tau-s} f^5(\cdot, \tau) d\tau\|^2 \end{aligned}$$

ou melhor:

$$\|\eta\|_{L_g^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))}^2 \leq C \left(\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|f^5\|_{L_g^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))}^2 \right), \quad (2.4.12)$$

de onde concluímos que

$$\eta \in L_g^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)).$$

De (2.4.4), obtemos:

$$\beta_0 \Delta u + \int_0^\infty g(s) \Delta \eta(s) ds \in L^2(\Omega).$$

Por outro lado de (2.4.7), obtemos:

$$\begin{aligned} \|\eta_s\|^2 &= \|f^5 - \eta + \varphi\|^2 \\ \|\eta_s\|_{L_g^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))}^2 &\leq C \left(\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|f^5\|_{L_g^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))}^2 + \|\eta\|_{L_g^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))}^2 \right), \end{aligned}$$

de onde podemos concluir que:

$$\eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)).$$

Novamente de (2.4.8), obtemos:

$$\eta(0) = 0.$$

O que prova a sobrejetividade de $(I - \mathcal{A})$, portanto pelo teorema de Lummer-Phillips (ver [23]), o operador \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contração. ■

2.5 Perda de Estabilidade Exponencial

Nesta seção provaremos que o operador resolvente não é uniformemente limitado. Isto significa afirmar que o semigrupo, associado ao sistema (2.0.13) – (2.0.19), não é exponencialmente estável. Para simplificar os cálculos, suponhamos que o núcleo seja da forma $g(t) = e^{-\mu t}$, com $t \in \mathbb{R}^+$ e $\mu > 1$. Para alcançarmos esta finalidade, usaremos o teorema de Prüss [17] a saber:

Teorema 2.5. *Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um semigrupo C_0 de contrações sobre um espaço de Hilbert \mathcal{H} gerado pelo operador \mathcal{A} . Então $S(t)$ é exponencialmente estável, se e somente se,*

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R},$$

e

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty,$$

onde $\rho(\mathcal{A})$ é o conjunto resolvente do operador \mathcal{A} .

Prova. Ver [17] ■

Para estudarmos o comportamento assintótico do sistema em questão, considere o seguinte problema espectral:

$$\begin{cases} -\Delta w_m = \lambda_m w_m & \text{in } \Omega \\ w_m = 0 & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (2.5.1)$$

onde,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = +\infty.$$

O teorema que vamos enunciar neste momento, descreve o principal resultado desta seção.

Teorema 2.6. *Suponhamos que $g(t) = e^{-\mu t}$, com $t \in \mathbb{R}^+$ e $\mu > 1$ é o núcleo e que $S(t)$ é o semigrupo C_0 de contrações gerado por \mathcal{A} , ambos associados ao sistema (2.0.13) – (2.0.19). Então $S(t)$ não é exponencialmente estável.*

Prova. Do teorema 2.5, devemos mostrar que existe uma sequência de números complexos λ_m , tal que

$$\|(\lambda_m - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \rightarrow \infty. \quad (2.5.2)$$

O que equivale provar que, dada uma sequência $F_m \in \mathcal{H}$, com $\|F_m\|_{\mathcal{H}} \leq 1$, de modo que

$$\|(\lambda_m I - \mathcal{A})^{-1} F_m\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty \quad (2.5.3)$$

onde,

$$\lambda_m U_m - \mathcal{A}U_m = F_m \quad (2.5.4)$$

com U_m não limitado.

Para simplificar a notação, omitiremos o subíndice m . Então a equação (2.5.4) fica escrita da seguinte forma:

$$\begin{cases} i\lambda u - \varphi = f^1, \\ i\lambda\varphi - \beta_0\Delta u + \alpha v - \int_0^\infty g(s)\Delta\eta(x,s)ds = f^2, \\ i\lambda v - \psi = f^3, \\ i\lambda\psi - \Delta v + \alpha u = f^4, \\ i\lambda\eta - \varphi + \eta_s = f^5. \end{cases} \quad (2.5.5)$$

Considere as seguintes identidades: $f^1 = f^3 = f^5 = 0$, obtemos $\varphi = i\lambda u$ e $\psi = i\lambda v$. Fazendo $f^2 = f^4 = w_m$, o sistema (2.5.5) torna-se:

$$\begin{cases} -\lambda^2 u - \beta_0\Delta u + \alpha v - \int_0^\infty g(s)\Delta\eta(x,s)ds = w_m, \\ -\lambda^2 v - \Delta v + \alpha u = w_m, \\ i\lambda\eta + \eta_s - i\lambda u = 0. \end{cases} \quad (2.5.6)$$

Estamos interessados em soluções da seguinte forma:

$$u = aw_m, \quad v = bw_m, \quad \varphi = cw_m, \quad \psi = dw_m, \quad \eta(x,s) = \gamma(s)w_m$$

com $a, b, c, d \in C$ e $\gamma(s)$ dependente de λ , será determinado explicitamente na sequência. de (2.5.6), verificamos que a e b satisfazem

$$\begin{cases} -\lambda^2 a + \beta_0 a \lambda_m + \alpha b + \lambda_m \int_0^\infty g(s)\gamma(s)ds = 1, \\ -\lambda^2 b + \lambda_m b + \alpha a = 1, \\ \gamma'(s) + i\lambda\gamma(s) - i\lambda a = 0. \end{cases} \quad (2.5.7)$$

Resolvendo (2.5.7)₃, encontramos:

$$\gamma(s) = Ce^{-i\lambda s} + a. \quad (2.5.8)$$

Desde que $\eta(0) = 0$, então $C = -a$, e (2.5.8) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\gamma(s) = a - ae^{-i\lambda s}. \quad (2.5.9)$$

De, (2.5.9) temos:

$$\int_0^{\infty} g(s)\gamma(s) ds = \int_0^{\infty} g(s)(a - ae^{-i\lambda s}) ds = ab_0 - a \int_0^{\infty} g(s)e^{-i\lambda s} ds \quad (2.5.10)$$

onde,

$$b_0 = \int_0^{\infty} g(s) ds.$$

Agora, escolhendo $\lambda = \sqrt{\lambda_m}$, e usando as equações (2.5.7)₁ e (2.5.7)₂ obtemos:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\alpha}, \\ b &= \frac{\lambda_m(1 - \beta_0)}{\alpha^2} - \frac{\lambda_m}{\alpha} \int_0^{\infty} g(s)\gamma(s) ds + \frac{1}{\alpha}, \\ c &= i\frac{\sqrt{\lambda_m}}{\alpha}, \\ d &= i\sqrt{\lambda_m} \left(\frac{\lambda_m(1 - \beta_0)}{\alpha^2} - \frac{\lambda_m}{\alpha} \int_0^{\infty} g(s)\gamma(s) ds + \frac{1}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Lembrando que:

$$\varphi = cw_m = i\frac{\sqrt{\lambda_m}}{\alpha}w_m$$

como o w_m são ortonormais, obtemos:

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{\lambda_m}{\alpha^2}.$$

Portanto, temos:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|U_m\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_m}{\alpha^2} = \infty.$$

Do teorema de Prüss (2.5) segue que, o semigrupo $S(t)$ não é exponencialmente estável. O que conclui a demonstração do teorema. ■

2.6 Estabilidade Polinomial e Taxa Ótima

Nesta seção estudaremos o decaimento polinomial associado ao sistema (2.0.13) – (2.0.19), e, posteriormente encontraremos a taxa ótima de decaimento. Considere a equação resolvente:

$$(i\lambda I - \mathcal{A})U = F, \quad \text{with } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad F \in \mathcal{H},$$

ou seja,

$$i\lambda u - \varphi = f^1, \tag{2.6.1}$$

$$i\lambda\varphi - \beta_0\Delta u + \alpha v - \mathcal{T}\eta = f^2, \tag{2.6.2}$$

$$i\lambda v - \psi = f^3, \tag{2.6.3}$$

$$i\lambda\psi - \Delta v + \alpha u = f^4, \tag{2.6.4}$$

$$i\lambda\eta - \varphi + \eta_s = f^5. \tag{2.6.5}$$

Os próximos três lemas que apresentaremos, serão importantes para provarmos o nosso resultado principal.

Lema 2.7. *As soluções do sistema (2.0.13) – (2.0.19), dada pelo Teorema 2.4, satisfaz*

$$\int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) |\nabla \eta|^2 ds dx \leq K \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}$$

onde, K é uma constante positiva .

Prova. Multiplicando a equação resolvente por U , obtemos:

$$i\lambda \|U\|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}}$$

tomando a parte real do resolvente , encontramos

$$-\mathcal{R}e (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}}.$$

Da dissipatividade do operador em (2.4.2),obtemos:

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\infty} g'(s) \int_{\Omega} |\nabla \eta(s)|^2 dx ds = (F, U)_{\mathcal{H}}.$$

Agora, usando a hipótese sobre a g e a propriedade do módulo do produto interno, obtemos:

$$\int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) |\nabla \eta(s)|^2 ds dx \leq K \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (2.6.6)$$

que conclui a demonstração. ■

Lema 2.8. *Para algum ϵ , existe uma constante positiva K_{ϵ} , tal que*

$$\begin{aligned} & \beta_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} (u\bar{v} + v\bar{u}) dx \\ & \leq \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx + \int_{\Omega} |\psi|^2 dx + \epsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ & + K_{\epsilon} |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + K \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

onde K , é uma constante positiva.

Prova. Multiplicando as equações (2.6.2) e (2.6.4) por \bar{u} e \bar{v} , respectivamente, e integrando por partes em Ω , e somando os resultados, obtemos:

$$\begin{aligned} & \underbrace{i\lambda \int_{\Omega} \varphi \bar{u} dx}_{:=I_4} + \beta_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} v \bar{u} dx + \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \nabla \eta(s) \cdot \nabla \bar{u} ds dx \\ & + i\lambda \underbrace{\int_{\Omega} \psi \bar{v} dx}_{:=I_5} + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} u \bar{v} dx \\ & = \int_{\Omega} f^2 \bar{u} dx + \int_{\Omega} f^4 \bar{v} dx. \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

Note que, fazendo $\overline{i\lambda u}$ em (2.6.1) e substituindo em I_4 , obtemos:

$$I_4 = - \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx - \int_{\Omega} \varphi \overline{f^1} dx. \quad (2.6.8)$$

Analogamente, fazendo $\overline{i\lambda v}$ em (2.6.3) e substituindo em I_5 , obtemos:

$$I_5 = - \int_{\Omega} |\psi|^2 dx - \int_{\Omega} \psi \overline{f^3} dx. \quad (2.6.9)$$

Substituindo, (2.6.8) e (2.6.9) em (2.6.7), obtemos:

$$\begin{aligned} & \beta_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} (u\overline{v} + v\overline{u}) dx \\ &= \int_{\Omega} (|\varphi|^2 + |\psi|^2) dx - \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot \nabla \overline{u} dx + \int_{\Omega} \varphi \overline{f^1} dx \\ &+ \int_{\Omega} f^2 \overline{u} dx + \int_{\Omega} \psi \overline{f^3} dx + \int_{\Omega} f^4 \overline{v} dx. \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

Das desigualdades de Poincaré e Yang, obtemos:

$$\begin{aligned} & \beta_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} (u\overline{v} + v\overline{u}) dx \\ & \leq \int_{\Omega} (|\varphi|^2 + |\psi|^2) dx + \epsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ & + K_{\epsilon} \|\eta\|_{L^2_{\eta}(\mathbb{R}^+; H^1_0(\Omega))}^2 + K \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Usando o *Lema* – 2.7, concluímos a prova. ■

Lema 2.9. *Sob condições Lema anterior, temos que*

$$\begin{aligned} \frac{b_0}{2} \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx & \leq \epsilon \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx \\ & + K_{\epsilon} |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ & + K \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{K}{|\lambda|^2}\right) \int_{\Omega} |\psi|^2 dx &\leq K_{\epsilon} |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ K \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

com $|\lambda| > 1$ grande o suficiente.

Prova. Multiplicando a equação (2.6.5) por $\int_0^{\infty} g(s) ds \bar{\varphi}$ e integrando em Ω , obtemos:

$$\begin{aligned} \underbrace{i\lambda \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \eta(s) \bar{\varphi} dx ds - b_0 \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx}_{:=I_6} + \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \eta_s(s) \bar{\varphi} dx ds \\ = \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} f^5(s) \bar{\varphi} dx ds \end{aligned}$$

onde $b_0 = \int_0^{\infty} g(s) ds$. Por outro lado, observe que:

$$\int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \eta_s(s) \bar{\varphi} dx ds = - \int_0^{\infty} g'(s) \int_{\Omega} \eta(s) \bar{\varphi} dx ds.$$

Então, fazendo $\overline{i\lambda\varphi}$ em (2.6.2) e substituindo em I_6 , obtemos:

$$\begin{aligned} b_0 \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx &= -\beta_0 \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \eta(s) \Delta \bar{u} dx ds + \alpha \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \eta(s) \bar{v} dx ds \\ &- \alpha \int_{\Omega} \left(\int_0^{\infty} g(s) \eta(s) ds \right) \left(\int_0^{\infty} g(s) \Delta \eta(s) ds \right) \\ &+ \int_0^{\infty} g'(s) \int_{\Omega} \eta(s) \bar{\varphi} dx ds - \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} \eta(s) \bar{f}^2 dx ds. \end{aligned} \tag{2.6.12}$$

Usando as hipóteses sobre g dada em (2.1.1) e as desigualdades de Poincaré e Young, obtemos:

$$\frac{b_0}{2} \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \leq \epsilon \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx + K_{\epsilon} \|\eta\|_{L^2_{\beta}(\mathbb{R}^+; H^1_0(\Omega))}^2 + K \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando o *Lema* – 2.7, obtemos:

$$\frac{b_0}{2} \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \leq \epsilon \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx + K_{\epsilon} |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + K \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Para mostrarmos a segunda desigualdade substituiremos a equação (2.6.1) em (2.6.5). obtemos,

$$i\lambda\eta - i\lambda u + \eta_s = f^5 - f^1. \quad (2.6.13)$$

Agora, isolando u em (2.6.4) e substituindo em (2.6.13). obtemos,

$$i\lambda\alpha\eta - \lambda^2\psi - i\lambda\Delta v + \alpha\eta_s = \alpha(f^5 - f^1) + i\lambda f^4. \quad (2.6.14)$$

Multiplicando a equação (2.6.14) por $\overline{\int_0^{\infty} g(s)\psi}$, integrando por partes em Ω , e procedendo da mesma maneira que na primeira estimativa, obtemos:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\psi|^2 dx \leq \frac{K}{|\lambda|^2} \int_{\Omega} |\psi|^2 dx + K |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + K \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

De onde segue a segunda desigualdade. O que completa a prova do Lema. ■

Agora, estamos em condições de mostrarmos o principal resultado deste Capítulo.

Teorema 2.10. *O semigrupo associado ao sistema (2.0.13)–(2.0.19) é polinomialmente estável e*

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{K}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})}.$$

Além disso, este resultado é ótimo.

Prova. Usando do Lemas (2.7), (2.8) e (2.9), escolhendo um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para um $|\lambda| > 1$ grande o suficiente, temos:

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + K\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

De onde segue que,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq K|\lambda|^4\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Assim, obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K|\lambda|^4\|F\|_{\mathcal{H}}^2$$

que é equivalente a

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq K|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto,

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq K|\lambda|^2.$$

Então, usando o Teorema 2.4 de [25], obtemos:

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\| = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}}) \Rightarrow \|S(t)\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{K}{\sqrt{t}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Desde que \mathcal{A} é sobrejetivo sobre \mathcal{H} , então considerando $\mathcal{A}U_0 = F$, da última desigualdade, obtemos

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{K}{\sqrt{t}}\|\mathcal{A}U_0\|_{\mathcal{H}}$$

de onde, segue que:

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{K}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{D(\mathcal{A})} \tag{2.6.15}$$

o que nos leva afirmar que a solução tem estabilidade polinomial.

Para provarmos que esta taxa de decaimento é ótima, usaremos argumento de contradição. Suponhamos que a taxa $t^{-\frac{1}{2}}$, pode ser melhorada, e que a taxa $t^{-\frac{1}{2-\epsilon}}$ é a taxa ótima, para algum $0 < \epsilon < 2$. Suponhamos que o operador

$$|\lambda|^{-2+\frac{\epsilon}{2}} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|,$$

é limitado, ver [6]. Para isto, suponhamos que exista uma sequência $(\lambda_\mu) \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{\mu \rightarrow \infty} |\lambda_\mu| = \infty$ e $(U_\mu) \subset D(\mathcal{A})$ para $(F_\mu) \subset \mathcal{H}$, tal que

$$(i\lambda_\mu I - \mathcal{A})U_\mu = F_\mu$$

é limitado em \mathcal{H} e

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} |\lambda_\mu|^{-2+\frac{\epsilon}{2}} \|U_\mu\|_{\mathcal{H}} = \infty.$$

Seguindo os mesmos passos da demonstração do teorema 2.5, podemos concluir que

$$|\lambda_\mu|^{-2+\frac{\epsilon}{2}} \|U_\mu\|_{\mathcal{H}} \geq O(\mu^{\frac{\epsilon}{2}}) \rightarrow \infty, \quad \text{quando } \mu \rightarrow \infty,$$

Provando que a taxa não pode ser melhorada. O que conclui a demonstração do teorema. ■

Existência de Soluções para um Sistema de Bresse

Neste capítulo investigaremos a existência e unicidade de soluções para o sistema de Bresse com duas dissipações não lineares.

3.1 Fundamentação Teórica

Basicamente, as hipóteses para o modelo dinâmico de vigas curvas são realizadas considerando uma curvatura no plano de um arco circular de comprimento L , raio R , seção transversal A , momento de inércia I , módulo de Young E , módulo do cortante G e fator de correção k , no esforço cortante da estrutura.

As equações diferenciais que governam o estiramento de uma viga curva, isotrópica e linearmente elástica, de raio R e comprimento L , são expressas de acordo com as seguinte leis:

Equações de Movimento:

$$\rho A \varphi_{tt} = Q_x + R^{-1} N \quad (3.1.1)$$

$$\rho I \psi_{tt} = M_x - Q \quad (3.1.2)$$

$$\rho A \omega_{tt} = N_x - R^{-1} Q. \quad (3.1.3)$$

Equações de Tensão-Estiramento

$$\varepsilon = \omega_x - R^{-1} \varphi \quad (3.1.4)$$

$$\gamma = \varphi_x + R^{-1} \omega + \psi \quad (3.1.5)$$

$$\widehat{k} = \psi_x. \quad (3.1.6)$$

Equações Elásticas Constitutivas

$$N = EA\varepsilon \quad (3.1.7)$$

$$Q = kGA\gamma \quad (3.1.8)$$

$$M = EA\widehat{k}, \quad (3.1.9)$$

onde, t é o tempo e x a distância ao longo da linha central da viga curva. No primeiro conjunto de equações, as forças internas são a força axial N , a força cortante Q e o momento da curvatura M . O deslocamento total da linha central da viga curva possui um deslocamento tangencial ω , um deslocamento transversal/normal φ e a rotação das seções transversais denotado por ψ .

Das equações (3.1.1) – (3.1.9), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas e acopladas:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - \kappa_0 l(\omega_x - l\varphi) = 0, \quad (3.1.10)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \quad (3.1.11)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0(\omega_x - l\varphi)_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0. \quad (3.1.12)$$

Aqui, $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $\kappa = \kappa' GA$, $\kappa_0 = EA$, $b = EI$ e $l = R^{-1}$. Essas equações também são chamadas de equações de Bresse para vigas curvas.

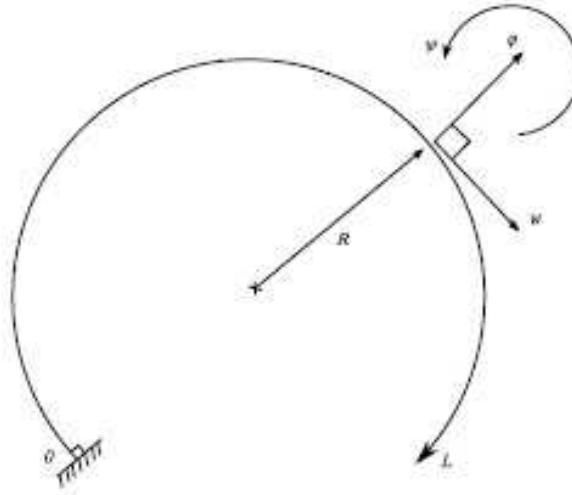


FIGURA 3.1: O Arco circular

3.2 O Modelo a Ser Investigado

Com base nas fundamentações Teóricas acima, investigaremos o seguinte sistema de Bresse com dois mecanismos dissipativos não lineares do tipo atrito dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - \kappa_0 l(\omega_x - l\varphi) = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \quad (3.2.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) + h_1(\psi_t) = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \quad (3.2.2)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0(\omega_x - l\varphi)_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + l\omega) + h_2(\omega_t) = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \quad (3.2.3)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \omega_x(0, t) = \omega_x(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0(\cdot), \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1(\cdot); \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0(\cdot), \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1(\cdot), \\ \omega(\cdot, 0) = \omega_0(\cdot), \quad \omega_t(\cdot, 0) = \omega_1(\cdot), \quad \forall x \in (0, L). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Observe que quando $R \rightarrow \infty$, $l \rightarrow 0$ resultando em um sistema de Timoshenko com um mecanismo dissipativo não linear, dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (3.2.6)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + h_1(\psi_t) = 0, \quad (3.2.7)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (3.2.8)$$

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (3.2.9)$$

e condições iniciais:

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0(\cdot), \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1(\cdot); \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0(\cdot), \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1(\cdot) \quad \forall x \in (0, L). \quad (3.2.10)$$

O sistema (3.2.7) – (3.2.10), foi estudado por Fatiha Alabau-Bousoira [19].

Para chegarmos ao nosso objetivo, vamos considerar algumas informações preliminares que enunciaremos abaixo.

3.3 Hipóteses.

Para a resolução do problema (3.2.1) – (3.2.5), assumiremos as seguintes hipóteses:

(H1)

Sejam, $h_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ($i = 1, 2$), funções monótonas não decrescentes e não-lineares de classe $C^1(\mathbb{R})$, e suponhamos que existam constantes reais positivas C_k , ($k = 1, \dots, 4$) tais que:

$$\cdot h_i(s)s \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2. \quad (3.3.1)$$

$$\cdot C_k |s| \leq |h_i(s)| \leq C_{k+1} |s|, \quad |s| \geq 1, \quad i = \{1, 2\}, \quad k = \{1, 3\}. \quad (3.3.2)$$

(H2)

Existe uma função g , estritamente não crescente, inversível e $C^1(\mathbb{R})$, tal que:

$$\cdot C_k |g(s)| \leq |h_i(s)| \leq C_{k+1} |g^{-1}(s)| \quad |s| \leq 1, \quad i = \{1, 2\}, \quad k = \{1, 3\}. \quad (3.3.3)$$

onde, g^{-1} é a inversa de g .

(H3)

Existe $r_i \in (0, 1)$, tal que $g(r_i) < 1$, $g \in C^2([0, r_0^2])$, onde $r_0 = \max\{r_1, r_2\}$ e uma função H estritamente convexa, $C^2([0, r_0^2])$ e definida por

$$H(v) = \sqrt{v}g(\sqrt{v}).$$

Assumindo as hipóteses (H1) – (H3), introduziremos algumas definições preliminares.

(H4)

Seja $\widehat{H} : [0, r_0^2] \rightarrow \mathbb{R}$, uma função definida da seguinte forma:

$$\widehat{H} = \begin{cases} H(x), & \text{se } x \in [0, r_0^2] \\ +\infty, & \text{se } x \in \mathbb{R} - [0, r_0^2] \end{cases} \quad (3.3.4)$$

(H5)

Seja $F : [0, +\infty) \rightarrow [0, r_0^2)$ uma função contínua, estritamente crescente definida por:

$$F(y) = \begin{cases} \frac{\widehat{H}^*(y)}{y}, & \text{se } y \in (0, +\infty) \\ 0, & \text{se } y = 0, \end{cases} \quad (3.3.5)$$

onde \widehat{H}^* representa uma função convexa conjugada de \widehat{H} , isto é:

$$\widehat{H}^*(y) = \sup\{xy - \widehat{H}(x)\}. \quad (3.3.6)$$

Então podemos redefinir a função F , por:

$$F(y) = \begin{cases} (H')^{-1}(y) - \frac{H((H')^{-1}(y))}{y}, & \text{se } y \in [0, H'(r_0^2)] \\ r_0^2 - \frac{H'(r_0^2)}{y}, & \text{se } y \in [H'(r_0^2), +\infty). \end{cases} \quad (3.3.7)$$

(H6)

Seja $f : [0, 2\beta r_0^2] \rightarrow [0, +\infty)$, uma função não negativa estritamente crescente $C^1([0, +\infty))$, definida por:

$$f(s) = F^{-1}\left(\frac{s}{2\beta}\right), \quad \forall s \in [0, 2\beta r_0^2], \quad (3.3.8)$$

onde $\beta = \beta_{E(0)}$, é dado em (3.7.111). Tal dependência de $E(0)$ é dada da seguinte forma: $\beta_{E(0)} = \max\{\eta_1, \eta_2, E(0)\}$, onde η_1 e η_2 são constantes que não dependem de $E(0)$, mas das características físicas da viga, isto é, dependem de $l, \rho_1, \rho_2, b, \kappa$ e κ_0 .

(H7)

Tomando r_0 como em (H3) e $\beta = \beta_{E(0)}$, definimos o seguinte conjunto:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\beta_{E(0)}, r_0^2} = \{f \in C^1([0, 2\beta r_0^2], [0, +\infty))\}. \quad (3.3.9)$$

3.4 A Energia do Modelo

Nesta seção, analisaremos a energia do sistema (3.2.1) – (3.2.5). Enunciaremos o resultado a seguir:

Proposição 3.1. *Se $E(t)$ é a energia associada ao problema (3.2.1) – (3.2.5), então,*

$$E'(t) = -\left\{ \int_0^L h_1(\psi_t)\psi_t dx + \int_0^L h_2(\omega_t)\omega_t dx \right\}, \quad (3.4.1)$$

isto é,

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.4.2)$$

Prova. De fato, a energia do modelo de Bresse acima descrito, é constituída a partir do método da energia, ou seja basta multiplicarmos as equações de (3.2.1) – (3.2.3) por φ_t, ψ_t e ω_t respectivamente, em seguida efetuamos a integração em $[0, L]$, e usando as condições de fronteira

(3.2.5), obteremos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_t dx + \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi_t dx + \int_0^L \rho_1 \omega_{tt} \omega_t dx + \int_0^L b \psi_x \psi_{xt} dx + \int_0^L \kappa (\varphi_x + \psi + l\omega) \varphi_{xt} dx \\
 & + \int_0^L \kappa (\varphi_x + \psi + l\omega) \psi_t dx + \int_0^L \kappa (\varphi_x + \psi + l\omega) \omega_t dx - \int_0^L \kappa_0 l (\omega_x - l\varphi) \varphi_t dx \\
 & + \int_0^L \kappa_0 (\omega_x - l\varphi) \omega_{xt} dx + \int_0^L h_1 (\psi_t) \psi_t dx + \int_0^L h_2 (\omega_t) \omega_t dx = 0,
 \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

ou:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_t dx + \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi_t dx + \int_0^L \rho_1 \omega_{tt} \omega_t dx + \int_0^L b \psi_x \psi_{xt} dx \\
 & + \int_0^L \kappa (\varphi_x + \psi + l\omega) (\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx + \int_0^L \kappa_0 (\omega_x - l\varphi) (\omega_x - l\varphi)_t dx \\
 & + \int_0^L h_1 (\psi_t) \psi_t dx + \int_0^L h_2 (\omega_t) \omega_t dx = 0.
 \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Agora, note que:

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_t dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 dx; \\
 \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi_t dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_2 |\psi_t|^2 dx; \\
 \int_0^L \rho_1 \omega_{tt} \omega_t dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 |\omega_t|^2 dx; \\
 \int_0^L b \psi_x \psi_{xt} dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L b |\psi_x|^2 dx;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)(\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \kappa |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx; \\ \int_0^L \kappa_0(\omega_x - l\varphi)(\omega_x - l\varphi)_t dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \kappa_0 |\omega_x - l\varphi|^2 dx \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

substituindo os resultados de (3.4.5), em (3.4.4) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |\omega_t|^2 + b |\psi_x|^2 + \kappa |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + \kappa_0 |\omega_x - l\varphi|^2] dx \\ \underbrace{\hspace{15em}}_{=:E(t)} \\ = - \int_0^L h_1(\psi_t) \psi_t dx - \int_0^L h_2(\omega_t) \omega_t dx. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

A Hipótese (3.3.1) sobre as h_i para $i = 1, 2$., nos garante que $-h_i(s)s \leq 0$, o que nos leva a afirmar que $\int_0^L h_i(s)s dx \geq 0$, de onde obtemos que:

$$E'(t) = - \left\{ \int_0^L h_1(\psi_t) \psi_t dx + \int_0^L h_2(\omega_t) \omega_t dx \right\} \leq 0. \quad (3.4.7)$$

Integrando de 0 até t , obtemos:

$$E(t) = - \int_0^t \left\{ \int_0^L h_1(\psi_t) \psi_t dx + \int_0^L h_2(\omega_t) \omega_t dx \right\} dt + E(0),$$

segue que:

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t \geq 0,$$

o que nos leva a afirmar que o sistema em questão, é dissipativo. ■

3.5 O Cenário de Semigrupo

Vamos reescrever o problema (3.2.1) – (3.2.3), em um sistema de EDO de primeira ordem para $\Phi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \omega, \omega_t)'$, onde ' denota a transposta do vetor Φ . Então, Φ satisfaz a seguinte equação:

$$\begin{cases} \Phi_t = \mathcal{A}\Phi \\ \Phi(0) = \Phi_0 \end{cases} \quad (3.5.1)$$

onde $\Phi_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)$ e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador diferencial dado por:

$$\mathcal{A} = -(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2),$$

com, \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 , dados por:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\kappa\partial_x^2 - \kappa_0 l)}{\rho_1} I & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1} \partial_x I & 0 & \frac{(\kappa_0 + \kappa)l}{\rho_1} \partial_x I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{\rho_2} \partial_x & 0 & \frac{(b\partial_x^2 - \kappa)}{\rho_2} I & 0 & -\frac{\kappa l}{\rho_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \frac{(\kappa_0 - \kappa)l}{\rho_1} \partial_x I & 0 & \frac{\kappa l}{\rho_1} I & 0 & \frac{\kappa_0 \partial_x^2 - \kappa l^2}{\rho_1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5.2)$$

e

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h_1(\phi)}{\rho_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h_2(\theta)}{\rho_1} \end{pmatrix}. \quad (3.5.3)$$

Aqui, $\partial_x(\cdot)$, $\partial_x^2(\cdot)$ indicam os operadores derivadas de primeira e segunda ordens, respectivamente, na variável x , e I o operador identidade.

A energia $E(t)$ em (3.4.6) sugere o seguinte espaço de Hilbert \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} := H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L),$$

onde, $H_*^1(0, L) = H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L)$ e $L_*^2(0, L) = \left\{ u \in L^2(0, L) ; \int_0^L u(x)dx = 0 \right\}$.

Considere o seguinte produto interno :

$$\begin{aligned} (\Phi, \Phi_1)_{\mathcal{H}} := & \int_0^L [\rho_1 \chi \chi_1 + \rho_2 \phi \phi_1 + \rho_1 \theta \theta_1 + b \psi_x \psi_{1,x} + \kappa (\varphi_x + \psi + l\omega) (\varphi_{1,x} + \psi_1 + l\omega_1) \\ & + \kappa_0 (\omega_x - l\varphi) (\omega_{1,x} - \varphi_1)] dx, \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

e norma

$$\|\Phi\|_{\mathcal{H}_i}^2 := \rho_1 \|\chi\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|\phi\|_{L^2}^2 + \rho_1 \|\theta\|_{L^2}^2 + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + \kappa_0 \|\omega_x - l\varphi\|_{L^2}^2, \quad (3.5.5)$$

onde $\Phi = (\varphi, \chi, \psi, \phi, \omega, \theta)' \in \mathcal{H}$.

Assim, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, têm os seguintes domínios:

$$D(\mathcal{A}_1) = \{\Phi \in \mathcal{H}; \varphi, \psi, \omega \in H^2(0, L), \chi \in H_0^1(0, L), \phi, \theta \in H_*^1(0, L), \psi_x, \omega_x \in H_0^1(0, L)\} \quad (3.5.6)$$

e

$$D(\mathcal{A}_2) = \mathcal{H}, \quad (3.5.7)$$

Veremos a seguir o significado de solução para o problema de valor inicial (PVI), segundo V. Barbu [22].

Definição 3.2. Diremos que $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}$, é uma solução forte para o problema de valor inicial (3.5.1), se Φ é contínua em $[0, \infty)$, Lipschitziana em cada subconjunto compacto de $[0, \infty)$, $\Phi(t)$ é diferenciável em $[0, \infty)$ e

$$\Phi_t(t) = \mathcal{A}\Phi(t), \quad \text{para quase todo } t \in (0, \infty).$$

Definição 3.3. A função $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}_i$, será chamada de solução integral para o problema de valor inicial (3.5.1), se Φ é contínua em $[0, \infty)$, $\Phi(0) = \Phi_0$ satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{2} \|\Phi(t) - \Psi\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{2} \|\Phi(s) - \Psi\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_s^t (\mathcal{A}\Psi + \mathcal{B}\Phi(r), \Phi(r) - \Psi)_{\mathcal{H}} dr,$$

para todo $\Psi \in D(\mathcal{A})$ e $0 \leq s < t < \infty$, onde $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ é o produto interno de \mathcal{H} .

Com base nessas duas definições, podemos enunciar o resultado de existência de soluções.

Teorema 3.4. *Para qualquer dado inicial $\Phi_0 = \{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1\} \in \mathcal{H}$, o problema (3.5.1) admite uma única solução fraca. Além disso, se $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$ a respectiva solução será forte.*

Prova. A ideia da prova é mostrar que o operador $\mathcal{A} = -(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)$ é um operador maximal monótono em \mathcal{H} , para tanto usaremos a mesma técnica desenvolvida em [11]. Dividiremos a demonstração do teorema em duas partes. Na primeira parte usaremos o corolário 1.1 de Barbu [26] com o objetivo de concluir que:

(i) O operador $-\mathcal{A}_1$ é maximal monótono.

Depois usando o teorema 3.1 de Brezis [27], para mostrar que:

(ii) O operador $-\mathcal{A}_2$ é monótono, hemicontínuo e limitado.

Prova de (i). Mostraremos que $-\mathcal{A}_1$ é monótono e que $Im(I - \mathcal{A}_1) = \mathcal{H}$. Como \mathcal{H} é um espaço de Hilbert, da proposição 2.2 do livro do Brezis [27], segue o resultado. Na verdade, o fato de ser monótono decorre de:

$$(-\mathcal{A}_1\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}} = 0, \text{ para todo } \Phi \in D(\mathcal{A}).$$

Tomemos, agora a função vetorial $F = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6) \in \mathcal{H}$. E vamos resolver o seguinte problema espectral:

$$\Phi - \mathcal{A}_1\Phi = F \tag{3.5.8}$$

para algum $\Phi \in D(\mathcal{A})$, onde $\Phi = (\varphi, \chi, \psi, \phi, \omega, \theta)$. Logo a equação (3.5.8) é equivalente à:

$$\varphi - \chi = F_1 \in H_0^1(0, L) \tag{3.5.9}$$

$$\rho_1\chi - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - \kappa_0 l(\omega_x - l\varphi) = \rho_1 F_2 \in L^2(0, L) \tag{3.5.10}$$

$$\psi - \phi = F_3 \in H_*^1(0, L) \tag{3.5.11}$$

$$\rho_2\phi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) = \rho_2 F_4 \in L_*^2(0, L) \tag{3.5.12}$$

$$\omega - \theta = F_5 \in H_*^1(0, L) \tag{3.5.13}$$

$$\rho_1\theta - \kappa_0(\omega_x - l\varphi)x + \kappa l(\varphi_x + \psi + l\omega) = \rho_1 F_6 \in L_*^2(0, L). \tag{3.5.14}$$

Isolando, χ , ϕ e θ em (3.5.9), (3.5.11) e (3.5.13) respectivamente, obtemos:

$$\rho_1\varphi - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - \kappa_0l(\omega_x - l\varphi) = f_1 \in L^2(0, L) \quad (3.5.15)$$

$$\rho_2\psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) = f_2 \in L_*^2(0, L) \quad (3.5.16)$$

$$\rho_1\omega - \kappa_0(\omega_x - l\varphi)x + \kappa l(\varphi_x + \psi + l\omega) = f_3 \in L_*^2(0, L), \quad (3.5.17)$$

onde,

$$f_1 = \rho_1(F_1 + F_2), \quad f_2 = \rho_2(F_3 + F_4), \quad e \quad f_3 = \rho_1(F_5 + F_6).$$

Para $\mathcal{F} = H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$, seja $a(., .) : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ a forma bilinear definida por:

$$\begin{aligned} a(\{\varphi, \psi, \omega\}; \{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}\}) &= \int_0^L \left\{ \rho_1\varphi\tilde{\varphi} + \rho_2\psi\tilde{\psi} + \rho_1\omega\tilde{\omega} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega}) \right. \\ &\quad \left. + b\psi_x\tilde{\psi}_x + \kappa_0(\omega_x - l\varphi)(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi}) \right\} dx. \end{aligned}$$

A forma bilinear $a(., .)$ é contínua e coerciva, sobre o espaço de Hilbert \mathcal{F} , logo pelo Lema de Lax-Milgram [24], temos que existe uma única solução $\{\varphi, \psi, \omega\} \in \mathcal{F}$ para o seguinte problema variacional:

$$a(\{\varphi, \psi, \omega\}; \{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}\}) = \left\langle F; \{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}\} \right\rangle, \quad \forall \{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}\} \in \mathcal{F},$$

onde $F = \{f_1, f_2, f_3\} \in \mathcal{F}$. Portanto, existe uma única solução $\{\varphi, \psi, \omega\} \in \mathcal{F}$ que satisfaz o sistema (3.5.15) – (3.5.17). Além disso, dado qualquer $F \in L^2(0, L) \times L_*^2(0, L) \times L_*^2(0, L)$, segue dos resultados clássicos de regularidade elíptica que $\{\varphi, \psi, \omega\} \in \mathcal{F} \cap [H^2(0, L) \times H^2(0, L) \times H^2(0, L)]$.

Prova de (ii). Tendo como referencia a hipótese (3.3.1), temos que o operador $-\mathcal{A}_2$ satisfaz a seguinte desigualdade:

$$(-\mathcal{A}_2\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}} \geq 0,$$

o que prova a monotonia de $-\mathcal{A}_2$. Agora, considere $\Phi_i = (\varphi_i, \chi_i, \psi_i, \phi_i, \omega_i, \theta_i)$, com $i = 1, 2$ e também a seguinte expressão:

$$(-\mathcal{A}_2(\Phi_1 + t\Phi_2), \Phi)_{\mathcal{H}} = (h_1(\chi_1 + t\chi_2), \chi)_{L_*^2} + (h_2(\phi_1 + t\phi_2), \phi)_{L_*^2},$$

para todo $t > 0$. queremos mostrar que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} [(h_1(\chi_1 + t\chi_2), \chi)_{L_*^2} + (h_2(\phi_1 + t\phi_2), \phi)_{L_*^2}] = (h_1(\chi_1), \chi)_{L_*^2} + (h_2(\phi_2), \phi)_{L_*^2}. \quad (3.5.18)$$

Então, é suficiente mostrarmos só a primeira parcela do limite, pois a outra, é análogo. Para tanto, considere a função $f \in L^1(0, L)$, dada por:

$$f(x) = h_1(\chi_1(x))\chi(x)$$

e definimos a seguinte sequência de função $(f_n) \subset L^1(0, L)$, dada por:

$$f_n(x) = h_1(\chi_1(x) + \frac{1}{n}\chi_2(x)) \cdot \chi(x), \quad (3.5.19)$$

então, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ quase sempre em } (0, L).$$

De fato, considere o seguinte conjunto:

$$\Sigma_n = \left\{ x \in [0, L]; \left| \chi_1(x) + \frac{1}{n}\chi_2(x) \right| < 1 \right\}, \quad (3.5.20)$$

note que,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| h_1 \left(\chi_1(x) + \frac{1}{n}\chi_2(x) \right) \right| |\chi(x)| \\ &\leq c_1 \underbrace{\left| \chi_1(x) + \frac{1}{n}\chi_2(x) \right|}_{< 1} |\chi(x)| \\ \Rightarrow |f_n(x)| &\leq c_1 |\chi(x)|, \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

para quase todo $x \in \Sigma_n$, onde c_1 é uma constante positiva.

Por outro lado, usando a hipótese (3.3.1), temos que:

$$\begin{aligned}
 |f_n(x)| &= \left| h_1 \left(\chi_1(x) + \frac{1}{n} \chi_2(x) \right) \right| |\chi(x)| \\
 &\leq c_1 \left| \chi_1(x) + \frac{1}{n} \chi_2(x) \right| |\chi(x)| \\
 &\leq c_1 \left(|\chi_1(x)| + |\chi_2(x)| \right) |\chi(x)|,
 \end{aligned} \tag{3.5.22}$$

para quase todo $x \in [0, L] - \Sigma_n$. Ambos os casos, nos permite concluir que (f_n) é limitada por uma função integrável em $[0, L]$. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, podemos passar o limite e concluir que $-\mathcal{A}_2$ é hemicontínuo.

Finalmente, concluimos a partir da hipótese (3.3.1), que $-\mathcal{A}_2$ é limitado em subconjuntos limitados.

Portanto de (i) e (ii), temos que o operador \mathcal{A} , é maximal monótono, e portanto do teorema 3.1 do livro do Brezis [27], concluimos a demonstração. ■

3.6 Comportamento Assintótico

Nesta seção, apresentaremos o principal resultado deste capítulo que é fornecer algumas taxas de decaimento para as soluções do Sistema de Bresse (3.2.1) – (3.2.5). Com base na técnica introduzida por Fatiha Alabau Bousoira [19]. Esta técnica consiste na criação de uma fórmula geral semi-explicita para taxa de decaimento da energia no infinito, quando as velocidades de propagação de ondas das equações são iguais. Isto é, quando:

$$\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2} \quad \text{e} \quad \kappa = \kappa_0.$$

Provaremos que a energia associada ao sistema (3.2.1) – (3.2.5), satisfaz:

$$E(t) \leq 2\beta_{E(0)} z^2(t) \frac{z(t)g'(z(t)) - g(z(t))}{z(t)g'(z(t)) + g(z(t))}, \quad \forall t \geq \frac{T_0}{H'(r_0^2)}, \tag{3.6.1}$$

onde $\beta_{E(0)}$, z e g são definidas como em (3.7.111), (3.12), (3.3) e r_0 é dado por (H3). Assim temos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0,$$

a taxa de decaimento a ser dada pela estimativa (3.6.1). Para provar a desigualdade (3.6.1) basta mostrar a seguinte estimativa para a energia:

$$\int_S^T E(t) f(E(t)) dt \leq T_0 E(S), \quad \forall \quad 0 \leq S \leq T, \quad (3.6.2)$$

onde $T_0 = 2((\delta_1 + (\delta_2 + \delta_3)C_5 + (\delta_4 + \delta_5)C_6)H'(r_0^2) + (\delta_2 + \delta_3)C_5 + (\delta_4 + \delta_5)C_6)$, será determinada posteriormente.

3.7 Resultado Principal de Comportamento Assintótico

Teorema 3.5. *Assumindo que $h_i, i = 1, 2$, satisfazem as hipóteses $H_j, j = 1, 2$, e seja f uma função arbitrária no conjunto $\mathcal{F}_{\beta_{E(0)}, r_0^2}$ definido em (3.3.9). Então existem constantes positivas δ_k , com $k = 1, 2, \dots, 7$, independentes de f , tal que a energia associada ao sistema (3.2.1) – (3.2.5), satisfaz a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned} & \int_S^T E(t) f(E(t)) dt \leq \delta_1 E(S) f(E(S)) \\ & + \delta_2 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |h_1(\psi_t)|^2 dx dt \\ & + \delta_3 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |h_2(\omega_t)|^2 dx dt \\ & + \delta_4 \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_{tt}|^2 dx dt \\ & + \delta_5 \left| \frac{\rho_1}{\kappa_0} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right|^2 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_{tt}|^2 dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\delta_6 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + \delta_7 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt \\
 & - \underbrace{\frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_{xt} \omega_t dx dt - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_t \omega_{xt} dx dt}_{:=I_1} \quad (3.7.1)
 \end{aligned}$$

Observação 3.6. Para a demonstração deste teorema, Assumiremos que velocidades de propagações são diferentes, ou seja, $\frac{\rho_1}{\kappa} \neq \frac{\rho_2}{b}$ e $\kappa \neq \kappa_0$.

Prova. A prova deste teorema, segue os passos abaixo.

Primeiro Passo Multiplicando as equações (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) do problema (3.2.1) – (3.2.5), por $-\kappa^{-1}f(E(t))\psi_x$, $b^{-1}f(E(t))(\varphi_x + \psi + l\omega)$ e $\kappa_0^{-1}f(E(t))(\omega_x - l\varphi)$, respectivamente, somando-as e em seguida integrando no retângulo $[S, T] \times [0, L]$, onde $0 \leq S \leq T$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx dt - \frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \psi_x dx dt \\
 & + \frac{\rho_2}{b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \psi_{tt} (\varphi_x + \psi + l\omega) dx dt + \frac{\kappa}{b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx dt \\
 & + \frac{1}{b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L h_1(\psi_t) (\varphi_x + \psi + l\omega) dx dt + \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \omega_{tt} (\omega_x - l\varphi) dx dt \\
 & - \frac{1}{2} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \frac{d}{dx} |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt + \frac{\kappa l}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) (\omega_x - l\varphi) dx dt \\
 & + \frac{1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L h_2(\omega_t) (\omega_x - l\varphi) dx dt - \int_S^T f(E(t)) [\varphi_x \psi_x]_0^L dt = 0. \quad (3.7.2)
 \end{aligned}$$

Agora, somando e subtraindo:

$$\frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \psi_{tt} (\varphi_x + \psi + l\omega) dx dt \text{ e } \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \omega_{tt} (\omega_x - l\varphi) dx dt,$$

em (3.7.2) e fazendo os ajustes necessários, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa}{b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx dt = -\frac{1}{b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L h_1(\psi_t)(\varphi_x + \psi + l\omega) dx dt \\
& - \frac{1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L h_2(\omega_t)(\omega_x - l\varphi) dx dt + \left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \psi_{tt}(\varphi_x + \psi + l\omega) dx dt \\
& + \left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_1}{\kappa_0}\right) \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \omega_{tt}(\omega_x - l\varphi) dx dt - \frac{\rho_1}{\kappa} \left[\int_0^L f(E(t)) \psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right]_0^T \\
& + \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx dt + \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt \\
& - \frac{\rho_1}{\kappa} \left[\int_0^L f(E(t)) \omega_t(\omega_x - l\varphi) dx \right]_0^T + \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \omega_t(\omega_x - l\varphi) dx dt \\
& - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L l\omega_t \varphi_t dx dt - \frac{\rho_1}{\kappa} \left[\int_0^L f(E(t)) \varphi_t \psi_x dx \right]_0^T + \frac{l\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \psi_t \omega_t dx dt \\
& + \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \varphi_t \psi_x dx dt + \frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \psi_x dx dt \\
& - \frac{\kappa l}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)(\omega_x - l\varphi) dx dt. \tag{3.7.3}
\end{aligned}$$

Agora, estamos em condições de analisar cada termo do lado direito da igualdade (3.7.3).

Usando a desigualdade de Young, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L h_1(\psi_t)(\varphi_x + \psi + l\omega) dx dt \right| \\
& \leq \frac{6}{\kappa b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |h_1(\psi_t)|^2 dx dt + \frac{\kappa}{6b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx dt, \tag{3.7.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L h_2(\omega_t)(\omega_x - l\varphi) dx dt \right| \\
 & \leq \frac{6\kappa}{\kappa_0^2 l} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |h_2(\omega_t)|^2 dx dt + \frac{\kappa_0 l}{6\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt,
 \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \psi_{tt}(\varphi_x + \psi + l\omega) dx dt \right| \\
 & \leq \frac{6b}{\kappa} \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_{tt}|^2 dx dt + \frac{\kappa}{6b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx dt,
 \end{aligned} \tag{3.7.6}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \left(\frac{\rho_1}{\kappa_0} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \omega_{tt}(\omega_x - l\varphi) dx dt \right| \\
 & \leq \frac{1}{6\kappa\kappa_0 l} \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_1}{\kappa_0} \right|^2 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_{tt}|^2 dx dt + \frac{\kappa_0 l}{6\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt,
 \end{aligned} \tag{3.7.7}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{l\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \psi_t \omega_t dx dt \right| \\
 & \leq \frac{l\rho_1}{2\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + \frac{l\rho_1}{2\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt,
 \end{aligned} \tag{3.7.8}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{l\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \omega_t \varphi_t dx dt \right| \\
& \leq \frac{4l^2\rho_1}{\kappa_0^2\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt + \frac{\rho_1}{4\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\varphi_t|^2 dx dt,
\end{aligned} \tag{3.7.9}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\kappa l}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \psi_x dx dt \right| \\
& \leq \frac{\kappa_0 l}{6\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt + \frac{4\kappa^3 l}{\kappa_0^3} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt.
\end{aligned} \tag{3.7.10}$$

Os demais termos de (3.7.3), serão estimados a partir do seguinte argumento: como $E(t)$ é uma função monótona não-crescente, enquanto que f é uma função monótona não-decrescente, temos:

$$\begin{aligned}
& \forall S < T \Rightarrow E(S) \geq E(T); \\
& \forall E(T) \leq E(S) \Rightarrow f(E(T)) \leq f(E(S)).
\end{aligned}$$

dai obtemos,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\kappa} \rho_1 \left[f(E(t)) \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi + \omega) \right]_S^T \right| \\
& \leq \frac{\rho_1}{\kappa} f(E(T)) \int_0^L |[\psi_t (\varphi_x + \psi + \omega)](T)| + \frac{\rho_1}{\kappa} f(E(S)) \int_0^L |[\psi_t (\varphi_x + \psi + \omega)](S)| \\
& \leq C [f(E(T))E(T) + f(E(S))E(S)] \leq C_1 [f(E(S))E(S) + f(E(S))E(S)] \\
& \leq C f(E(S))E(S).
\end{aligned} \tag{3.7.11}$$

De modo inteiramente análogo, temos:

$$\left| \frac{1}{\kappa_0} \rho_1 \left[f(E(t)) \int_0^L \omega_t(\omega_x - l\varphi) \right]_S^T \right| \leq C f(E(S)) E(S). \quad (3.7.12)$$

$$\left| \frac{\rho_1}{\kappa} \left[f(E(t)) \int_0^L \varphi_t \psi_x \right]_S^T \right| \leq C f(E(S)) E(S), \quad (3.7.13)$$

agora, temos:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi + \omega) \right| \\ & \leq \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T |f'(E(t)) E'(t)| \int_0^L |\psi_t(\varphi_x + \psi + \omega)| \\ & \leq \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T |f'(E(t))| |E'(t)| |E(t)| \leq C \int_S^T f'(E(t)) (-E'(t)) E(t) \\ & = C \int_T^S f'(E(t)) E'(t) E(t) = \frac{C_7}{2} \int_T^S f'(E(t)) 2E'(t) E(t) = \frac{C_7}{2} \int_T^S f'(E(t)) \frac{d}{dt} |E(t)|^2 \\ & \leq C E(S) [f(E(t))]_T^S \leq C_8 E(S) f(E(S)), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

De modo inteiramente análogo, obtemos:

$$\left| \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \omega_t(\omega_x - l\varphi) \right| \leq C E(S) f(E(S)), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \quad (3.7.15)$$

$$\left| \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \omega_t \psi_x \right| \leq C E(S) f(E(S)), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \quad (3.7.16)$$

Onde, C , são constantes positivas arbitrária que dependem de l , ρ_1 , ρ_2 , κ , κ_0 e b , substituindo os resultados de (3.7.4) à (3.7.16) em (3.7.3), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa}{2b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx dt \leq \\
& CE(S)f(E(S)) + C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |h_1(\psi_t)|^2 dx dt + C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |h_2(\omega_t)|^2 dx dt \\
& + C \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_{tt}|^2 dx dt + C \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_1}{\kappa_0} \right|^2 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_{tt}|^2 dx dt \\
& + C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt \\
& + C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt + \frac{\kappa_0 l}{4\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt \\
& + \frac{\rho_1}{4\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\varphi_t|^2 dx dt. \tag{3.7.17}
\end{aligned}$$

Segundo Passo

Seja y a única solução do sistema:

$$\begin{cases} -y_{xx} = (\psi + l\omega)_x, & \text{in } (0, L) \\ y(0) = y(L) = 0. \end{cases} \tag{3.7.18}$$

de onde obtemos:

$$y_x = -(\psi + l\omega) + \frac{1}{L} \int_0^L (\psi + l\omega) dx, \tag{3.7.19}$$

elevando ao quadrado, ambos os lados da igualdade e em seguida integrando de 0 até L obtemos:

$$\int_0^L y_x^2 dx = \int_0^L (\psi + l\omega)^2 dx - \frac{1}{L} \left(\int_0^L (\psi + l\omega) dx \right)^2, \quad (3.7.20)$$

ou melhor:

$$\int_0^L (\psi + l\omega)^2 dx = \int_0^L y_x^2 dx + \frac{1}{L} \left(\int_0^L (\psi + l\omega) dx \right)^2. \quad (3.7.21)$$

Por outro lado, da desigualdade de Poincaré, obtemos:

$$\int_0^L (\psi + l\omega)^2 dx \leq C \int_0^L (\psi + l\omega)_x^2 dx, \quad (3.7.22)$$

agora, comparando (3.7.20) e (3.7.22) obtemos:

$$\int_0^L y_x^2 dx \leq C \int_0^L (\psi + l\omega)_x^2 dx, \quad (3.7.23)$$

onde C é uma constante que depende de L .

Usando (3.7.23) em (3.7.21), obtemos:

$$\int_0^L (\psi + l\omega)^2 dx \leq C \int_0^L (\psi + l\omega)_x^2 dx + C \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \leq CE(t). \quad (3.7.24)$$

Multiplicando a primeira equação de (3.2.1), por $\kappa^{-1}f(E(t))(\varphi - y)$ e integrando em $[S, T] \times [0, L]$, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_t^2 dx dt + \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx dt \\
& + \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\psi + l\omega)^2 - y_x^2 dx dt = -\frac{\rho_1}{\kappa} \left[f(E(t)) \int_0^L \varphi_t(\varphi - y) dx \right]_S^T \\
& + \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f'(E(t))E'(t) \int_0^L \varphi_t(\varphi - y) dx dt - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_t y_t dx dt \\
& + \frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\omega_x - l\varphi)(\varphi - y) dx dt. \tag{3.7.25}
\end{aligned}$$

Para estimar o lado direito de (3.7.25) precisamos estimar a norma de $(\varphi - y)$ em $L^2(0, L)$, para este feito, procederemos da seguinte forma: Uma vez que $(\varphi - y) = 0$ em $x = 0$ e $x = L$ da desigualdade de Poincaré temos:

$$\int_0^L |\varphi - y|^2 dx \leq C \int_0^L |(\varphi - y)_x|^2 dx \tag{3.7.26}$$

mas de (3.7.19) temos:

$$(\varphi - y)_x = (\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{1}{L} \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx$$

ou seja,

$$\int_0^L |(\varphi - y)_x|^2 \leq C \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx \leq CE(t) \tag{3.7.27}$$

de (3.7.26) e (3.7.27) obtemos que:

$$\int_0^L |\varphi - y|^2 \leq CE(t). \tag{3.7.28}$$

Por outro lado, graças a (3.7.21), podemos reescrever o terceiro termo do lado esquerdo de (3.7.25) da seguinte forma:

$$\int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\psi + l\omega)^2 - y_x^2 dx dt = \frac{1}{L} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\psi + l\omega)^2 dx dt. \quad (3.7.29)$$

Usando (3.7.29) em (3.7.21) obtemos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_t^2 dx dt + \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx dt \\ & + \frac{1}{L} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\psi + l\omega)^2 dx dt = -\frac{\rho_1}{\kappa} \left[f(E(t)) \int_0^L \varphi_t(\varphi - y) dx \right]_S^T \\ & + \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \varphi_t(\varphi - y) dx dt - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_t y_t dx dt \\ & + \frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\omega_x - l\varphi)(\varphi - y) dx dt. \end{aligned} \quad (3.7.30)$$

Estimando os termos do lado direito em (3.7.30), obtemos:

$$\left| \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \varphi_t(\varphi - y) dx dt \right| \leq C f(E(S)) E(S). \quad (3.7.31)$$

$$\left| \frac{\rho_1}{\kappa} \left[f(E(t)) \int_0^L \varphi_t(\varphi - y) dx \right]_S^T \right| \leq C f(E(S)) E(S). \quad (3.7.32)$$

$$\left| \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_t y_t dx dt \right| \leq \frac{\rho_1}{2\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\varphi_t|^2 dx dt + C f(E(S)) E(S). \quad (3.7.33)$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\omega_x - l\varphi)(\varphi - y) dx dt \right| \\
& \leq \frac{\kappa_0 l}{4\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt + C f(E(S)) E(S). \tag{3.7.34}
\end{aligned}$$

Substituindo (3.7.31) à (3.7.34) em (3.7.30), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_1}{2\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_t^2 dx dt + \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx dt \\
& + \frac{1}{L} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\psi + l\omega)^2 dx dt \leq C f(E(S)) E(S) + \frac{\kappa_0 l}{16\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt. \tag{3.7.35}
\end{aligned}$$

Terceiro Passo

Multiplicando a equação de (3.2.2), por $b^{-1}f(E(t))\psi$ e integrando em $[S, T] \times [0, L]$, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt = -\frac{\rho_2}{b} \left[f(E(t)) \int_0^L \psi_t \psi dx \right]_S^T \\
& + \frac{\rho_2}{b} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \psi_t \psi dx dt + \frac{\rho_2}{b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \psi_t^2 dx dt \\
& + \frac{\kappa}{b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) \psi dx dt + \frac{1}{b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L h_1(\psi_t) \psi dx dt. \tag{3.7.36}
\end{aligned}$$

Da equação (3.2.3), obtemos:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\kappa}{b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\psi \, dx \, dt \\
 & = \frac{1}{bl} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0 (\omega_x - l\varphi)_x + h_2(\omega_t))\psi \, dx \, dt \\
 & = \frac{\rho_1}{bl} \int_S^T E'(t) f'(E(t)) \int_0^L \omega_t \psi \, dx \, dt - \left[f(E(t)) \int_0^L \omega_t \psi \, dx \right]_S^T \\
 & \quad - \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \omega_t \psi_t \, dx \, dt + \frac{\kappa_0}{bl} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\omega_x - l\varphi)\psi_x \, dx \, dt \\
 & \quad + \frac{1}{bl} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L h_2(\omega_t)\psi \, dx \, dt. \tag{3.7.37}
 \end{aligned}$$

Substituindo, (3.7.37), em (3.7.36), obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx \, dt = -\frac{\rho_2}{b} \left[f(E(t)) \int_0^L \psi_t \psi \, dx \right]_S^T \\
 & \quad + \frac{\rho_2}{b} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \psi_t \psi \, dx \, dt + \frac{\rho_2}{b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \psi_t^2 \, dx \, dt \\
 & \quad + \frac{\rho_1}{bl} \int_S^T E'(t) f'(E(t)) \int_0^L \omega_t \psi \, dx \, dt - \left[f(E(t)) \int_0^L \omega_t \psi \, dx \right]_S^T \\
 & \quad - \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \omega_t \psi_t \, dx \, dt + \frac{\kappa_0}{bl} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\omega_x - l\varphi)\psi_x \, dx \, dt \\
 & \quad + \underbrace{\frac{1}{bl} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L h_2(\omega_t)\psi \, dx \, dt}_{=I_2} + \underbrace{\frac{1}{b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L h_1(\psi_t)\psi \, dx \, dt}_{=I_3}. \tag{3.7.38}
 \end{aligned}$$

Estamos em condições de estimar os termos do lado direito em (3.7.38). Note que, todos os termos do lado direito da identidade acima, são estimados facilmente, usando os mesmos

argumentos dos passos anteriores, porém os termos I_2 e I_3 , devem ser estimados de modo especial. Faremos tal prova apenas, em I_2 , pois em I_3 , será feito de maneira idêntica. Para tal, usaremos as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Poincaré e Young, respectivamente.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{bl} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L h_2(\omega_t) \psi dx dt \right| &\leq \int_S^T f(E(t)) \left\{ \int_0^L \frac{1}{b^2 l^2} |h_2(\omega_t)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^L |\psi|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx dt \\
&\leq \int_S^T f(E(t)) \left\{ \int_0^L \frac{C_p}{b^2 l^2} |h_2(\omega_t)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^L |\psi_x|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx dt \\
&\leq C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |h_2(\omega_t)|^2 dx dt + \frac{1}{4} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt,
\end{aligned} \tag{3.7.39}$$

de modo análogo, temos:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{b} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L h_1(\psi_t) \psi dx dt \right| &\leq C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |h_1(\psi_t)|^2 dx dt \\
&+ \frac{1}{4} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt,
\end{aligned} \tag{3.7.40}$$

$$\left| \left(\frac{\rho_2}{b} - 1 \right) \left[f(E(t)) \int_0^L [\omega_t + \psi_t] \psi dx \right]_S^T \right| \leq CF(E(S))E(S), \tag{3.7.41}$$

$$\left| \left(\frac{\rho_2}{b} + \frac{\rho_1}{bl} \right) \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L [\omega_t + \psi_t] \psi dx dt \right| \leq CF(E(S))E(S), \tag{3.7.42}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \omega_t \psi_t \, dx \, dt \right| \leq C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_t|^2 \, dx \, dt \\
 & + C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx \, dt,
 \end{aligned} \tag{3.7.43}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\kappa_0}{bl} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \psi_x \, dx \, dt \right| \\
 & \leq C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 \, dx \, dt + \frac{1}{4} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx \, dt.
 \end{aligned} \tag{3.7.44}$$

Substituindo, as estimativas (3.7.39)–(3.7.44), em (3.7.38), e fazendo os ajustes necessários, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx; \, dt \leq C f(E(S))E(S) + C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |h_1(\psi_t)|^2 \, dx \, dt \\
 & + C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx \, dt + C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |h_2(\omega_t)|^2 \, dx \, dt \\
 & + C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_t|^2 \, dx \, dt + C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 \, dx \, dt.
 \end{aligned} \tag{3.7.45}$$

Quarto Passo

Multiplicando a equação de (3.2.1), por $\kappa^{-1}f(E(t))(\omega_x - l\varphi)$ e integrando em $[S, T] \times [0, L]$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_{tt} (\omega_x - l\varphi) \, dx \, dt + \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) (\omega_x - l\varphi)_x \, dx \, dt \\
 & - \frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 \, dx \, dt = 0,
 \end{aligned} \tag{3.7.46}$$

mas, como:

$$(\omega_x - l\varphi)_x = \frac{\rho_1}{\kappa_0}\omega_{tt} + \frac{\kappa l}{\kappa_0}(\varphi_x + \psi + l\omega) + \frac{1}{\kappa_0}h_2(\omega_t). \quad (3.7.47)$$

Substituindo, (3.7.47) em (3.7.46), obtemos:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_{tt}(\omega_x - l\varphi) dx dt}_{=I_4} + \underbrace{\frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\omega_{tt} dx dt}_{=I_5} \\ & + \frac{\kappa l}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx dt - \frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt \\ & + \frac{1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)h_2(\omega_t) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (3.7.48)$$

Agora, ajustando os termos I_4 e I_5 alguns dos termos em (3.7.48), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_{tt}(\omega_t - l\varphi) dx dt &= \left[\frac{\rho_1}{\kappa} f(E(t)) \int_0^L \varphi_t(x, t)(\omega_x(x, t) - l\varphi(x, t)) \right]_S^T \\ &- \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f'(E(t))E'(t) \int_0^L \varphi_t(\omega_x - l\varphi) dx dt \\ &- \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_t \omega_{xt} dx dt \\ &+ \frac{\rho_1 l}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\varphi_t|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (3.7.49)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_x \omega_{tt} \, dx \, dt &= \left[\frac{\rho_1}{\kappa_0} f(E(t)) \int_0^L \varphi_x(x, t) \omega_t(x, t) \, dx \right]_S^T \\
 &- \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \varphi_x \omega_t \, dx \, dt \\
 &- \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_{xt} \omega_t \, dx \, dt, \tag{3.7.50}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \psi \omega_{tt} \, dx \, dt &= \left[\frac{\rho_1}{\kappa_0} f(E(t)) \int_0^L \psi(x, t) \omega_t(x, t) \, dx \right]_S^T \\
 &- \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \psi \omega_t \, dx \, dt \\
 &- \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \psi_t \omega_t \, dx \, dt \tag{3.7.51}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_1 l}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \omega \omega_{tt} \, dx \, dt &= \left[\frac{\rho_1 l}{\kappa_0} f(E(t)) \int_0^L \omega(x, t) \omega_t(x, t) \, dx \right]_S^T \\
 &- \frac{\rho_1 l}{\kappa_0} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \omega \omega_t \, dx \, dt \\
 &- \frac{\rho_1 l}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_t|^2 \, dx \, dt. \tag{3.7.52}
 \end{aligned}$$

Substituindo, (3.7.49) – (3.7.52), em (3.7.49), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt = \left[\frac{\rho_1}{\kappa} f(E(t)) \int_0^L \varphi_t(x, t) (\omega_x(x, t) - l\varphi(x, t)) \right]_S^T \\
& - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \varphi_t (\omega_x - l\varphi) dx dt - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_t \omega_{xt} dx dt \\
& + \frac{\rho_1 l}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\varphi_t|^2 dx dt + \left[\frac{\rho_1}{\kappa_0} f(E(t)) \int_0^L \varphi_x(x, t) \omega_t(x, t) dx \right]_S^T \\
& - \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \varphi_x \omega_t dx dt - \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_{xt} \omega_t dx dt \\
& \left[\frac{\rho_1}{\kappa_0} f(E(t)) \int_0^L \psi(x, t) \omega_t(x, t) dx \right]_S^T - \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \psi \omega_t dx dt \\
& - \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \psi_t \omega_t dx dt + \left[\frac{\rho_1 l}{\kappa_0} f(E(t)) \int_0^L \omega(x, t) \omega_t(x, t) dx \right]_S^T \\
& - \frac{\rho_1 l}{\kappa_0} \int_S^T f'(E(t)) E'(t) \int_0^L \omega \omega_t dx dt + \frac{\kappa l}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx dt \\
& - \frac{\rho_1 l}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt + \frac{1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) h_2(\omega_t) dx dt.
\end{aligned} \tag{3.7.53}$$

Procedendo, da mesma maneira que nos passos anteriores, no que diz respeito ao uso da desigualdade de Young, podemos estimar os termos do lado esquerdo direito de (3.7.53) de

modo que obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt \leq C f(E(S))E(S) \\
 & + C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |h_2(\omega_t)|^2 dx dt \\
 & + C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt + C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt \\
 & + \left(\frac{\kappa l}{\kappa_0} + \frac{\kappa}{8b} \right) \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx dt \\
 & - \underbrace{\frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_{xt} \omega_t dx dt - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_t \omega_{xt} dx dt}_{:=I_1}. \quad (3.7.54)
 \end{aligned}$$

Por fim, adicionemos convenientemente as desigualdades (3.7.17), (3.7.35), (3.7.45) e (3.7.54) em conjunto com a definição (3.4.1) de $E(t)$, deduzimos que existem constantes positivas δ_i , com $i = 1, \dots, 7$ que não dependem de f , tal que a estimativa desejada (3.7.1) se mantêm. O que conclui a prova do teorema. ■

Os dois lemas a seguir nos fornecerão estimativas para $h_1(\psi_t)$ e $h_2(\omega_t)$.

Lema 3.7. *Uma solução do sistema (3.2.1) – (3.2.5), satisfaz*

$$\begin{aligned}
 & \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (|h_1(\psi_t)|^2 + |h_2(\omega_t)|^2) dx dt \\
 & \leq C_5 L \int_S^T \widehat{H}^*(f(E(t))) dt + C_5 E(S) \\
 & + C_5 f(E(S))E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T.
 \end{aligned}$$

Prova. Sejam, $\varepsilon_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2$, de modo que $\varepsilon_i = g(r_i)$ e , onde $r_i \in [0, r_0]$. Então pela hipótese (H1) – (H2), temos que, existem constantes positivas $C_j > 0$, ($j = 1, \dots, 4$), tais que:

$$C_1|v| \leq |h_1(v)| \leq C_2|v|, \quad \forall |v| \geq \varepsilon_1, \quad (3.7.55)$$

$$C_1g(|v|) \leq |h_1(v)| \leq C_2g^{-1}(|v|), \quad \forall |v| \leq \varepsilon_1, \quad (3.7.56)$$

$$C_3|v| \leq |h_2(v)| \leq C_4|v|, \quad \forall |v| \geq \varepsilon_2, \quad (3.7.57)$$

$$C_3g(|v|) \leq |h_2(v)| \leq C_4g^{-1}(|v|), \quad \forall |v| \leq \varepsilon_2. \quad (3.7.58)$$

Para cada $t \geq 0$ fixo, definimos os conjuntos:

$$I^t = \{x \in (0, L); \psi_t(t, x) \leq \varepsilon_1\}$$

e

$$J^t = \{x \in (0, L); \omega_t(t, x) \leq \varepsilon_2\},$$

desde que g^{-1} , seja monótona não-decrescente em \mathbb{R} , então temos:

$$\frac{1}{|I^t|} \int_{I^t} |C_2^{-1}h_1(\psi_t)|^2 dx, \quad \frac{1}{|J^t|} \int_{J^t} |C_4^{-1}h_2(\omega_t)|^2 dx \in [0, r_0^2]$$

Agora, da hipótese (3.3), temos que H é estritamente convexa em $[0, r_0^2]$, então podemos usar a desigualdade de Jensen para os termos acima, logo temos:

$$\begin{aligned} H \left(\frac{1}{|I^t|} \int_{I^t} |C_2^{-1}h_1(\psi_t)|^2 dx \right) &\leq \frac{1}{|I^t|} \int_{I^t} H(|C_2^{-1}h_1(\psi_t)|^2) dx \\ &= \frac{1}{|I^t|} \int_{I^t} \sqrt{|C_2^{-1}h_1(\psi_t)|^2} g(\sqrt{|C_2^{-1}h_1(\psi_t)|^2}) dx \\ &= \frac{1}{|I^t|} \int_{I^t} C_2^{-1}h_1(\psi_t) g(C_2^{-1}h_1(\psi_t)) dx \end{aligned} \quad (3.7.59)$$

e

$$\begin{aligned}
 H \left(\frac{1}{|J^t|} \int_{J^t} |C_4^{-1}h_2(\omega_t)|^2 dx \right) &\leq \frac{1}{|J^t|} \int_{J^t} H(|C_4^{-1}h_2(\omega_t)|^2) dx \\
 &= \frac{1}{|J^t|} \int_{J^t} \sqrt{|C_4^{-1}h_2(\psi_t)|^2} g(\sqrt{|C_4^{-1}h_2(\omega_t)|^2}) dx \\
 &= \frac{1}{|J^t|} \int_{J^t} C_4^{-1}h_2(\omega_t) g(C_4^{-1}h_2(\omega_t)) dx.
 \end{aligned} \tag{3.7.60}$$

Mas, como g é uma função não decrescente em \mathbb{R} , da desigualdade em (3.7.56) e (3.7.58) obtemos

$$g(C_2^{-1}|h_1(\psi_t)|^2) \leq \psi_t \quad \text{em } I^t, \tag{3.7.61}$$

$$g(C_4^{-1}|h_2(\omega_t)|^2) \leq \omega_t \quad \text{em } J^t. \tag{3.7.62}$$

Substituindo as desigualdades (3.7.61) e (3.7.62) em (3.7.59) e (3.7.60), respectivamente, obtemos:

$$H \left(\frac{1}{|I^t|} \int_{I^t} |C_2^{-1}h_1(\psi_t)|^2 dx \right) \leq \frac{1}{|I^t|} \int_{I^t} C_2^{-1}h_1(\psi_t)\psi_t dx, \tag{3.7.63}$$

$$H \left(\frac{1}{|J^t|} \int_{J^t} |C_4^{-1}h_2(\omega_t)|^2 dx \right) \leq \frac{1}{|J^t|} \int_{J^t} C_4^{-1}h_2(\omega_t)\omega_t dx. \tag{3.7.64}$$

Observando que h_i são função não decrescentes, daí obtemos:

$$\begin{aligned}
 |I^t|^{-1} \int_{I^t} C_2^{-1}h_1(\psi_t)\psi_t dx &\leq |I^t|^{-1} \int_{I^t} C_2^{-1}h_1(\varepsilon_1)\varepsilon_1 dx \\
 &= |I^t|^{-1} |I^t| C_2^{-1}h_1(\varepsilon_1)\varepsilon_1 \\
 &\leq c_2^{-1} C_2 g^{-1}(\varepsilon_1)\varepsilon_1 = \varepsilon_1 g_1^{-1}(\varepsilon_1) \\
 &= \sqrt{\varepsilon_1^2} g^{-1}(\sqrt{\varepsilon_1^2}) = H(r_1^2),
 \end{aligned} \tag{3.7.65}$$

e

$$|J^t|^{-1}C_4^{-1} \int_{J^t} h_2(\omega_t)\omega_t dx \leq C_4^{-1}\varepsilon_2 h_2(\varepsilon_2) \leq \varepsilon_2 g^{-1}(\varepsilon_2) = H(r_2^2), \quad (3.7.66)$$

de onde resulta que,

$$H^{-1} \left(|I^t|^{-1}C_2^{-1} \int_{I^t} h_1(\psi_t)\psi_t dx \right) \leq r_1^2 \leq r_0^2, \quad (3.7.67)$$

$$H^{-1} \left(|J^t|^{-1}C_4^{-1} \int_{J^t} h_2(\omega_t)\omega_t dx \right) \leq r_2^2 \leq r_0^2. \quad (3.7.68)$$

Portanto, podemos concluir que:

$$H^{-1} \left(|I^t|^{-1}C_2^{-1} \int_{I^t} h_1(\psi_t)\psi_t dx \right) \in [0, r_0^2] \quad (3.7.69)$$

$$H^{-1} \left(|J^t|^{-1}C_4^{-1} \int_{J^t} h_2(\omega_t)\omega_t dx \right) \in [0, r_0^2]. \quad (3.7.70)$$

Como H é uma função não decrescente, então de (3.7.63) e (3.7.64), segue que:

$$\begin{aligned} H^{-1} \left(H \left(|I^t|^{-1} \int_{I^t} |C_2^{-1}h_1(\psi_t)|^2 dx \right) \right) &\leq H^{-1} \left(|I^t|^{-1} \int_{I^t} C_2^{-1}h_1(\psi_t)\psi_t dx \right) \\ |I^t|^{-1}C_2^{-2} \int_{I^t} |h_1(\psi_t)|^2 dx &\leq H^{-1} \left(|I^t|^{-1} \int_{I^t} C_2^{-1}h_1(\psi_t)\psi_t dx \right) \\ \int_{I^t} |h_1(\psi_t)|^2 dx &\leq |I^t|C_2^2 H^{-1} \left(|I^t|^{-1} \int_{I^t} C_2^{-1}h_1(\psi_t)\psi_t dx \right), \end{aligned}$$

de onde obtemos:

$$\int_S^T f(E(t)) \int_{I^t} |h_1(\psi_t)|^2 dx dt \leq C_2^2 |I^t| \int_S^T f(E(t)) H^{-1} \left(|I^t|^{-1} \int_{I^t} c_2^{-1}h_1(\psi_t)\psi_t dx \right) dt,$$

analogamente,

$$\int_S^T f(E(t)) \int_{J^t} |h_2(\omega_t)|^2 dx dt \leq C_4^2 |I^t| \int_S^T f(E(t)) H^{-1} \left(|J^t|^{-1} \int_{J^t} C_4^{-1} h_2(\omega_t) \omega_t dx \right) dt. \quad (3.7.71)$$

Considerando que, \widehat{H} é adequadamente uma função convexa. Daí aplicando a desigualdade de Young (veja [28] e [29]),

$$\rho_i \mu_i \leq \widehat{H}^*(\rho_i) + \widehat{H}(\mu_i) \quad (3.7.72)$$

onde, $\rho_i, \mu_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, 2$.

Agora, tomando

$$\rho_1 = \rho_1(t) = f(E(t)), \quad \mu_1 = \mu_1(t) = H^{-1} \left(|I^t|^{-1} \int_{I^t} C_2^{-1} h_1(\psi_t) \psi_t dx \right)$$

e

$$\rho_2 = \rho_2(t) = f(E(t)), \quad \mu_2 = \mu_2(t) = H^{-1} \left(|J^t|^{-1} \int_{J^t} C_4^{-1} h_2(\omega_t) \omega_t dx \right)$$

então, de (3.7.69) e (3.7.70), deduzimos que $\mu_1(t), \mu_2(t) \in [0, r_0^2]$, e conseqüentemente, temos:

$$\widehat{H}(\mu_1) = H(\mu_1) = |I^t|^{-1} \int_{I^t} C_2^{-1} h_1(\psi_t) \psi_t dx, \quad (3.7.73)$$

$$\widehat{H}(\mu_2) = H(\mu_2) = |J^t|^{-1} \int_{J^t} C_4^{-1} h_2(\omega_t) \omega_t dx. \quad (3.7.74)$$

Agora, combinando a desigualdade (3.7.72) com as identidades (3.7.73) e (3.7.74) podemos deduzir de (3.7.71) e (3.7.71), o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
& \int_S^T f(E(t)) \int_{I^t} |h_1(\psi_t)|^2 dx dt + \int_S^T f(E(t)) \int_{J^t} |h_2(\omega_t)|^2 dx dt \\
& \leq C_2^2 L \int_S^T [\widehat{H}^*(f(E(t))) + |I^t| |I^t|^{-1} C_2^{-1} \int_{I^t} h_1(\psi_t) \psi_t dx] dt \\
& + C_4^2 L \int_S^T [\widehat{H}^*(f(E(t))) + |J^t| |J^t|^{-1} C_4^{-1} \int_{J^t} h_2(\omega_t) \omega_t dx] dt \\
& = (C_2^2 + C_4^2) L \int_S^T \widehat{H}^*(f(E(t))) dt + C_2 \int_S^T \int_{I^t} h_1(\psi_t) \psi_t dx \\
& + C_4 \int_S^T \int_{J^t} h_2(\omega_t) \omega_t dx. \tag{3.7.75}
\end{aligned}$$

Escolhendo, $C_5 = \max\{C_2, C_4, C_2^2 + C_4^2\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_S^T f(E(t)) \int_{I^t} |h_1(\psi_t)|^2 dx dt + \int_S^T f(E(t)) \int_{J^t} |h_2(\omega_t)|^2 dx dt \\
& \leq C_5 L \int_S^T \widehat{H}^*(f(E(t))) dt \\
& + C_5 \left(\int_S^T \int_{I^t} h_1(\psi_t) \psi_t dx dt + \int_S^T \int_{J^t} h_2(\omega_t) \omega_t dx dt \right). \tag{3.7.76}
\end{aligned}$$

Mas de (3.4.7), temos

$$E'(t) = - \left[\int_0^L h_1(\psi_t) \psi_t dx + \int_0^L h_2(\omega_t) \omega_t dx \right].$$

Isto implica que:

$$E'(t) = -\left[\int_{I^t} h_1(\psi_t) \psi_t dx + \int_{J^t} h_2(\omega_t) \omega_t dx \right]$$

$$\int_S^T -E'(t) dt = \int_S^T \left[\int_{I^t} h_1(\psi_t) \psi_t dx + \int_{J^t} h_2(\omega_t) \omega_t dx \right] dt.$$

Ou seja,

$$\int_S^T \int_{I^t} h_1(\psi_t) \psi_t dx dt + \int_S^T \int_{J^t} h_2(\omega_t) \omega_t dx dt \leq E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \quad (3.7.77)$$

Das estimativas (3.7.76) e (3.7.77), obtemos

$$\int_S^T f(E(t)) \int_{I^t} |h_1(\psi_t)|^2 dx dt + \int_S^T f(E(t)) \int_{J^t} |h_2(\omega_t)|^2 dx dt$$

$$\leq C_5 L \int_S^T \widehat{H}^*(f(E(t))) dt + C_5 E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \quad (3.7.78)$$

Por outro lado, das desigualdades (3.7.55) e (3.7.57), obtemos:

$$\int_S^T f(E(t)) \int_{(0,L)-I^t} |h_1(\psi_t)|^2 dx dt + \int_S^T f(E(t)) \int_{(0,L)-J^t} |h_2(\omega_t)|^2 dx dt$$

$$\leq C_2 \int_S^T f(E(t)) \int_{(0,L)-I^t} \psi_t h_1(\psi_t) dx dt + C_4 \int_S^T f(E(t)) \int_{(0,L)-J^t} \omega_t h_2(\omega_t) dx dt$$

$$\leq C_5 \int_S^T f(E(t)) \left[\int_{(0,L)-I^t} \psi_t h_1(\psi_t) dx + \int_{(0,L)-J^t} \omega_t h_2(\omega_t) dx \right] dt$$

$$= C_5 \int_S^T f(E(t)) (-E'(t)) dt. \quad (3.7.79)$$

Agora, pelo fato que, E e f , são funções não negativas, não crescente e não decrescente respectivamente. Deduzimos que:

$$\begin{aligned} & \int_S^T f(E(t)) \int_{(0,L)-I^t} |h_1(\psi_t)|^2 dx dt + \int_S^T f(E(t)) \int_{(0,L)-J^t} |h_2(\omega_t)|^2 dx dt \\ & \leq C_5 f(E(S))E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \end{aligned} \quad (3.7.80)$$

Agora, somando (3.7.80) e (3.7.78), obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_S^T f(E(t)) \int_0^L (|h_1(\psi_t)|^2 + |h_2(\omega_t)|^2) dx dt \\ & \leq C_5 L \int_S^T \widehat{H}^*(f(E(t))) dt + C_5 E(S) + C_5 f(E(S))E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T, \end{aligned} \quad (3.7.81)$$

o que conclui o lema. ■

O próximo Lema nos fornecerá as estimativas para ψ_t e ω_t .

Lema 3.8. *Com as mesmas hipóteses do Lema 3.7, obtemos*

$$\begin{aligned} & \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt \\ & \leq 2L \int_S^T \widehat{H}^*(f(E(t))) dt + C_6 E(S) + C_6 E(S)f(E(S)), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \end{aligned}$$

Prova. Vamos considerar,

$$r_3^2 = H^{-1}(C_1 C_2^{-1} H(r_0^2)), \quad r_4^2 = H^{-1}(C_3 C_4^{-1} H(r_0^2)), \quad \varepsilon_3 = \min\{r_0, g(r_3)\} \text{ e } \varepsilon_4 = \min\{r_0, g(r_4)\}.$$

Da hipótese, sabemos que existe constantes positivas que denotaremos por C_j , $j = 1, \dots, 4$, tais que:

$$C_1|v| \leq |h_1(v)| \leq C_2|v|, \quad \forall |v| \geq \varepsilon_3, \quad (3.7.82)$$

$$C_1g(|v|) \leq |h_1(v)| \leq C_2g^{-1}(|v|), \quad \forall |v| \leq \varepsilon_3, \quad (3.7.83)$$

$$C_3|v| \leq |h_2(v)| \leq C_4|v|, \quad \forall |v| \geq \varepsilon_4, \quad (3.7.84)$$

$$C_3g(|v|) \leq |h_2(v)| \leq C_4g^{-1}(|v|), \quad \forall |v| \leq \varepsilon_4. \quad (3.7.85)$$

Para $t \geq 0$ fixo, definimos os seguintes conjuntos:

$$K^t := \{x \in (0, L) : |\psi_t(t, x)| \leq \varepsilon_3\}, \quad M^t := \{x \in (0, L) : |\omega_t(t, x)| \leq \varepsilon_4\}$$

de onde segue que para todo $t \geq 0$, temos

$$|K^t|^{-1} \int_{K^t} |\psi_t|^2 dx \in [0, r_0^2],$$

e

$$|M^t|^{-1} \int_{M^t} |\omega_t|^2 dx \in [0, r_0^2].$$

Desde que H é estritamente convexa em $[0, r_0^2]$, podemos usar a desigualdade de Jensen nos termos acima, que nos dará:

$$\begin{aligned} H(|K^t|^{-1} \int_{K^t} |\psi_t|^2 dx) &\leq |K^t|^{-1} \int_{K^t} H(|\psi_t|^2) dx \\ &= |K^t|^{-1} \int_{K^t} \sqrt{|\psi_t|^2} h_1(\sqrt{|\psi_t|^2}) dx = |K^t|^{-1} \int_{K^t} |\psi_t| h_1(|\psi_t|) dx \end{aligned} \quad (3.7.86)$$

e analogamente,

$$H(|M^t|^{-1} \int_{M^t} |\omega_t|^2 dx) \leq |M^t|^{-1} \int_{M^t} |\omega_t| h_2(|\omega_t|) dx. \quad (3.7.87)$$

Agora, usando as desigualdades, (3.7.83) e (3.7.85), respectivamente, obtemos:

$$g(|\psi_t|) \leq C_1^{-1}h_1(\psi_t), \text{ em } K^t \quad (3.7.88)$$

$$g(|\omega_t|) \leq C_3^{-1}h_2(\omega_t), \text{ em } M^t. \quad (3.7.89)$$

Substituindo (3.7.88) e (3.7.89), em (3.7.86) e (3.7.87), respectivamente, obtemos:

$$H(|K^t|^{-1} \int_{K^t} |\psi_t|^2 dx) \leq |K^t|^{-1}C_1^{-1} \int_{K^t} \psi_t h_1(\psi_t) dx, \quad (3.7.90)$$

e

$$H(|M^t|^{-1} \int_{M^t} |\omega_t|^2 dx) \leq |M^t|^{-1}C_3^{-1} \int_{M^t} \omega_t h_2(\omega_t) dx. \quad (3.7.91)$$

Desde que H seja uma função não decrescente, obtemos:

$$\int_S^T f(E(t)) \int_{K^t} |\psi_t|^2 dx dt \leq \int_S^T f(E(t)) |K^t| H^{-1}(|K^t|^{-1}C_1^{-1} \int_{K^t} \psi_t h_1(\psi_t) dx) dt \quad (3.7.92)$$

e

$$\int_S^T f(E(t)) \int_{M^t} |\omega_t|^2 dx dt \leq \int_S^T f(E(t)) |M^t| H^{-1}(|M^t|^{-1}C_3^{-1} \int_{M^t} \omega_t h_2(\omega_t) dx) dt. \quad (3.7.93)$$

Usando a desigualdade de Young (3.7.72), e fazendo

$$\rho_1 = \rho_1(t) = f(E(t)), \quad \text{and} \quad \mu_1 = \mu_1(t) = H^{-1}(|K^t|^{-1}C_1^{-1} \int_{K^t} \psi_t h_1(\psi_t) dx)$$

e

$$\rho_2 = \rho_2(t) = f(E(t)) \quad \text{and} \quad \mu_2 = \mu_2(t) = H^{-1}(|M^t|^{-1}C_3^{-1} \int_{M^t} \omega_t h_2(\omega_t) dx)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \int_S^T f(E(t)) \int_{K^t} |\psi_t|^2 dx dt &\leq L \int_T^S \widehat{H}^*(f(E(t))) dt \\ + \int_S^T f(E(t)) |K^t| \widehat{H}^*(H^{-1}(|K^t|^{-1} C_1^{-1} \int_{K^t} \psi_t h_1(\psi_t) dx)) dt &\end{aligned} \quad (3.7.94)$$

e

$$\begin{aligned} \int_S^T f(E(t)) \int_{M^t} |\omega_t|^2 dx dt &\leq L \int_T^S \widehat{H}^*(f(E(t))) dt \\ + \int_S^T f(E(t)) |M^t| \widehat{H}^*(H^{-1}(|M^t|^{-1} C_3^{-1} \int_{M^t} \omega_t h_2(\omega_t) dx)) dt. &\end{aligned} \quad (3.7.95)$$

Da segunda desigualdade de (3.7.83), temos:

$$\begin{aligned} |K^t|^{-1} C_1^{-1} \int_{K^t} h_1(\psi_t) \psi_t dx &\leq |K^t|^{-1} C_1^{-1} C_2 \int_{K^t} g^{-1}(\psi_t) \psi_t dx \\ &\leq |K^t|^{-1} C_1^{-1} C_2 \int_{K^t} g^{-1}(\varepsilon_3) \varepsilon_3 dx \\ &= |K^t|^{-1} C_1^{-1} C_2 |K^t| g^{-1}(\varepsilon_3) \varepsilon_3 \leq C_1^{-1} C_2 r_3 g(r_3) \\ &= C_1^{-1} C_2 \sqrt{r_3^2} g(\sqrt{r_3^2}) = C_1^{-1} C_2 H(r_3^2) \\ &= C_1^{-1} C_2 C_1 C_2^{-1} H(r_0^2) = H(r_0^2). \end{aligned} \quad (3.7.96)$$

Analogamente, usando a segunda desigualdade de (3.7.85), chegamos à,

$$|M^t|^{-1} C_3^{-1} \int_{M^t} h_2(\omega_t) \omega_t dx \leq H(r_0^2). \quad (3.7.97)$$

Das estimativas, (3.7.96) e (3.7.97), e usando do fato que H é uma função não decrescente, podemos concluir que

$$H^{-1}\left(|K^t|^{-1}C_1^{-1} \int_{K^t} h_1(\psi_t)\psi_t dx\right) \in [0, r_0^2],$$

$$H^{-1}\left(|M^t|^{-1}C_3^{-1} \int_{M^t} h_2(\omega_t)\omega_t dx\right) \in [0, r_0^2].$$

A partir do que foi discutido acima, podemos concluir que

$$\widehat{H}^*(H^{-1}\left(|K^t|^{-1}C_1^{-1} \int_{K^t} h_1(\psi_t)\psi_t dx\right)) = |K^t|^{-1}C_1^{-1} \int_{K^t} h_1(\psi_t)\psi_t dx, \quad (3.7.98)$$

$$\widehat{H}^*(H^{-1}\left(|M^t|^{-1}C_3^{-1} \int_{M^t} h_2(\omega_t)\omega_t dx\right)) = |M^t|^{-1}C_3^{-1} \int_{M^t} h_2(\omega_t)\omega_t dx. \quad (3.7.99)$$

Substituindo as identidades (3.7.98) e (3.7.99) em (3.7.94) e (3.7.95), respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_S^T f(E(t)) \int_{K^t} |\psi_t|^2 dx dt \leq L \int_T^S \widehat{H}^*(f(E(t))) dt \\ & + \int_S^T |K^t|^{-1}|K^t|C_1^{-1} \int_{K^t} h_1(\psi_t)\psi_t dx dt \\ & = L \int_T^S \widehat{H}^*(f(E(t))) dt + \frac{1}{C_1} \int_S^T \int_{K^t} h_1(\psi_t)\psi_t dx dt, \end{aligned} \quad (3.7.100)$$

e

$$\begin{aligned} & \int_S^T f(E(t)) \int_{M^t} |\omega_t|^2 dx dt \leq L \int_T^S \widehat{H}^*(f(E(t))) dt \\ & + \int_S^T |M^t|^{-1}|M^t|C_3^{-1} \int_{M^t} h_2(\omega_t)\omega_t dx dt \\ & = L \int_T^S \widehat{H}^*(f(E(t))) dt + \frac{1}{C_3} \int_S^T \int_{M^t} h_2(\omega_t)\omega_t dx dt. \end{aligned} \quad (3.7.101)$$

Somando, (3.7.100) e (3.7.101), obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_S^T f(E(t)) \int_{K^t} |\psi_t|^2 dx dt + \int_S^T f(E(t)) \int_{M^t} |\omega_t|^2 dx dt \\ & \leq 2L \int_T^S \widehat{H}^*(f(E(t))) dt + C_6 \int_S^T \int_0^L (h_1(\psi_t)\psi_t + h_2(\omega_t)\omega_t) dx dt, \end{aligned} \quad (3.7.102)$$

onde $C_6 = \max\{C_1, C_3, \frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_3}\}$. Da condição de dissipação (3.4.7), temos

$$\begin{aligned} & \int_S^T f(E(t)) \int_{K^t} |\psi_t|^2 dx dt + \int_S^T f(E(t)) \int_{M^t} |\omega_t|^2 dx dt \\ & \leq 2L \int_T^S \widehat{H}^*(f(E(t))) dt + C_6 E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \end{aligned} \quad (3.7.103)$$

Por outro lado como no Lema anterior, temos,

$$\int_S^T f(E(t)) \int_{(0,L) \setminus K^t} |\psi_t|^2 dx dt \leq \frac{1}{C_1} E(S) f(E(S)), \quad \forall 0 \leq S \leq T, \quad (3.7.104)$$

e

$$\int_S^T f(E(t)) \int_{(0,L) \setminus M^t} |\omega_t|^2 dx dt \leq \frac{1}{C_3} E(S) f(E(S)), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \quad (3.7.105)$$

Agora, somando, (3.7.104) e (3.7.105), obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_S^T f(E(t)) \int_{(0,L) \setminus K^t} |\psi_t|^2 dx dt + \int_S^T f(E(t)) \int_{(0,L) \setminus M^t} |\omega_t|^2 dx dt \\ & \leq \frac{1}{C_1} E(S) f(E(S)) + \frac{1}{C_3} E(S) f(E(S)), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \end{aligned} \quad (3.7.106)$$

Combinando, (3.7.106) com (3.7.103), podemos concluir que:

$$\begin{aligned} & \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt \\ & \leq 2L \int_S^T \widehat{H}^*(f(E(t))) dt + C_6 E(S) + C_6 E(S) f(E(S)), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \end{aligned} \quad (3.7.107)$$

■

Observação 3.9. Se $\kappa = \kappa_0$, então da definição I_1 , temos

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_{xt} \omega_t dx dt - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_t \omega_{xt} dx dt \\ &= -\frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \frac{d}{dx} (\varphi_t \omega_t) dx dt \\ &= -\frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) [\varphi_t \omega_t]_0^L dt = 0 \end{aligned}$$

isto acontece devido as condições de contorno. Além disso, se $\frac{\rho_1}{\kappa} = \frac{\rho_2}{b}$, do Teorema 3.5, podemos concluir que

$$\begin{aligned} & \int_S^T E(t) f(E(t)) dt \leq \delta_1 E(S) f(E(S)) \\ & + \delta_2 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |h_1(\psi_t)|^2 dx dt \\ & + \delta_3 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |h_2(\omega_t)|^2 dx dt \\ & + \delta_4 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + \delta_5 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt. \end{aligned}$$

O resultado principal deste capítulo e dado no seguinte Teorema.

Teorema 3.10. *Suponhamos que $h_i, i = 1, 2$, satisfazem as hipóteses $H_j, j = 1, 2$, e seja f uma função arbitrária no conjunto $\mathcal{F}_{\beta_{E(0)}, r_0^2}$ definido em (3.3.9). Suponhamos também que*

$$\frac{\rho_1}{\kappa} = \frac{\rho_2}{b}, \quad \kappa = \kappa_0$$

e

$$\begin{aligned} & \int_S^T E(t)f(E(t)) dt \leq \delta_1 E(S)f(E(S)) \\ & + \delta_2 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |h_1(\psi_t)|^2 dx dt + \delta_3 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |h_2(\omega_t)|^2 dx dt \\ & + \delta_4 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + \delta_5 \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (3.7.108)$$

então existe uma constante positiva T_0 , com

$$T_0 = 2 \left((\delta_1 + (\delta_2 + \delta_3)C_5 + (\delta_4 + \delta_5)C_6)H'(r_0^2) + (\delta_2 + \delta_3)C_5 + (\delta_4 + \delta_5)C_6 \right)$$

tal que

$$\int_S^T E(t)f(E(t)) dt \leq T_0 E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \quad (3.7.109)$$

Prova. Substituindo os resultados dos *Lemas 3.7 e 3.8*, em (3.7.108), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_S^T f(E(t))E(t) dt \leq (\delta_1 + (\delta_2 + \delta_3)C_5 + (\delta_4 + \delta_5)C_6) f(E(S))E(S) \\ & + ((\delta_2 + \delta_3)C_5L + (\delta_4 + \delta_5)2L) \int_S^T \widehat{H}^*(f(E(t))) dt \\ & + ((\delta_2 + \delta_3)C_5 + (\delta_4 + \delta_5)C_6) E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \end{aligned} \quad (3.7.110)$$

para estimarmos $f(E(S))$, vamos considerar

$$\eta_1 := (\delta_2 + \delta_3)C_5L + (\delta_4 + \delta_5)2L, \quad \eta_2 := \frac{1}{2F(H'(r_0^2))},$$

tomando,

$$\beta = \max \left\{ (\delta_2 + \delta_3)C_5L + (\delta_4 + \delta_5)2L, \frac{E(0)}{2F(H'(r_0^2))} \right\}. \quad (3.7.111)$$

da hipótese (H5), temos que para todo $s \in [0, 2\beta r_0^2]$, da escolha de β , e sabendo que E é uma função monótona não decrescente, temos,

$$f(E(S)) \leq f(E(0)) = F^{-1} \left[\frac{E(0)}{2\beta} \right] = F^{-1} \left[\frac{\frac{E(0)}{2E(0)}}{\frac{2F(H'(r_0^2))}{2F(H'(r_0^2))}} \right] = H'(r_0^2), \quad \forall 0 \leq S. \quad (3.7.112)$$

Substituindo (3.7.112) em (3.7.110), segue que:

$$\begin{aligned} \int_S^T f(E(t))E(t) dt &\leq \beta \int_S^T \widehat{H}^*(f(E(t))) dt \\ &+ ((\delta_1 + (\delta_2 + \delta_3)C_5 + (\delta_4 + \delta_5)C_6)H'(r_0^2) + (\delta_2 + \delta_3)C_5 + (\delta_4 + \delta_5)C_6) E(S), \\ \forall 0 \leq S \leq T. \end{aligned} \quad (3.7.113)$$

Das hipóteses, (H5) e (H6), obtemos

$$\begin{aligned} \beta \widehat{H}^*(f(E(S))) &= \beta[f(S)F(f(S))] = \beta \left[f(S)F \left(F^{-1} \left(\frac{S}{2\beta} \right) \right) \right] \\ &= \beta f(S) \frac{S}{2\beta} = \frac{Sf(S)}{2}, \quad \forall S \in [0, 2\beta r_0^2]. \end{aligned} \quad (3.7.114)$$

Em Particular, para todo $S \geq 0$, esta relação é válida para $S = E(S)$, desde que $E(S) \in [0, 2\beta r_0^2]$, usando esta propriedade em (3.7.113), obtemos:

$$\int_S^T E(t)f(E(t))dt \leq \left[(\delta_1 + \delta_2 \frac{C_5}{2} + \delta_3 C_6)H'(r_0^2) + (\delta_2 C_5 + \delta_3 C_6) \right] E(S) + \frac{1}{2} \int_S^T E(t)f(E(t))dt \quad (3.7.115)$$

ou seja:

$$\int_S^T E(t)f(E(t))dt \leq 2((\delta_1 + (\delta_2 + \delta_3)C_5 + (\delta_4 + \delta_5)C_6)H'(r_0^2) + (\delta_2 + \delta_3)C_5 + (\delta_4 + \delta_5)C_6) E(S) \quad \forall 0 \leq S \leq T, \quad (3.7.116)$$

tomando,

$$T_0 = 2((\delta_1 + (\delta_2 + \delta_3)C_5 + (\delta_4 + \delta_5)C_6)H'(r_0^2) + (\delta_2 + \delta_3)C_5 + (\delta_4 + \delta_5)C_6). \quad (3.7.117)$$

Segue que:

$$\int_S^T f(E(t))E(t) dt \leq T_0E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T \quad (3.7.118)$$

o que conclui a prova. ■

O próximo teorema caracteriza a taxa de decaimento associada ao sistema (3.2.1) – (3.2.5). Tal resultado encontra-se na literatura no artigo [18].

Teorema 3.11. *Suponhamos que E seja uma função não-crescente absolutamente contínua, $E : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, satisfazendo, $0 < E < \eta$ e a desigualdade*

$$\int_S^T f(E(t))F^{-1}(E(t))dt \leq T_0E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \quad (3.7.119)$$

Então, E Satisfaz a seguinte estimativa:

$$E(t) \leq F\left(\frac{1}{\Psi_r^{-1}\left(\frac{t}{T_0}\right)}\right), \quad \forall t \geq \frac{T_0}{F_{-1}(r)}, \quad (3.7.120)$$

onde r e um número real tal que

$$\frac{1}{T_0} \int_0^\infty E(\tau)F^{-1}(E(\tau))d\tau \leq r < \eta.$$

Assim, temos o $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$ a taxa de decaimento a ser dado em (3.7.120).

Prova ver Apêndice

Teorema 3.12 (Comportamento Assintótico). *Sejam g, H, \widehat{H}, F, f e h_i , ($i = 1, 2$), satisfazem as hipóteses e definições (H1) – (H7), respectivamente. Além disso, sejam $T_0 > 0$ um número fixo, e $E : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ a energia associada ao problema (3.2.1) – (3.2.5), uma função monótona não-negativa, decrescente e absolutamente contínua em $[0, +\infty)$, definida por (3.4.6). Além disso suponhamos que existe constante positiva β definida em (3.7.111), tal que:*

$$0 < \frac{E(0)}{2F(H'(r_0^2))} \leq \beta \quad (3.7.121)$$

e

$$\int_S^T f(E(t))F^{-1}\left(\frac{E(t)}{2\beta}\right) dt \leq T_0 E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \quad (3.7.122)$$

Onde $(\varphi, \psi, \omega, \varphi_t, \psi_t, \omega_t)$ é a solução do problema (3.2.1) – (3.2.3), com condições de fronteiras (3.2.5) associada as condições iniciais $(\varphi_0, \psi_0, \omega_0, \varphi_1, \psi_1, \omega_1)$. Então $E(t)$ satisfaz a taxa de decaimento

$$E(t) \leq 2\beta_{E(0)} z^2(t) \frac{z(t)g'(z(t)) - g(z(t))}{z(t)g'(z(t)) + g(z(t))}, \quad \forall t \geq \frac{T_0}{H'(r_0^2)}, \quad (3.7.123)$$

onde,

$$z(t) = \phi^{-1}\left(\frac{t}{T_0}\right) \quad (3.7.124)$$

e $\phi : (0, r_0] \rightarrow [\frac{1}{H'(r_0^2)}, +\infty)$ é uma função estritamente crescente definida por:

$$\phi(v) = \frac{2v}{vg'(v) + g(v)} + 4\sigma(v), \quad (3.7.125)$$

$\sigma : (0, r_0] \rightarrow (0, r_0]$ é uma função definida pela seguinte expressão integral:

$$\sigma(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_0} \frac{g(u)(u^2 g''(u) + u g'(u) - g(u))}{(u g'(u) + g(u))^2 (u g'(u) - g(u))}, \quad (3.7.126)$$

para todo $(\varphi_0, \psi_0, \omega_0, \varphi_1, \psi_1, \omega_1) \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L)$, e T_0 não depende de $(\varphi_0, \psi_0, \omega_0, \varphi_1, \psi_1, \omega_1)$.

Prova Ver Apêndice

Exemplo 3.1 (O Caso Polinomial). *Seja g definida por $g(x) = x^p$, onde $p > 1$ em $(0, r_0]$, então:*

$$E(t) \leq \beta_{E(0)} t^{\frac{-2}{p-1}}$$

para t suficientemente grande.

Prova

De fato, em primeiro lugar, iremos resolver a expressão integral de $\sigma(\tau)$,

$$\sigma(\tau) = \int_{\tau}^{r_0} \frac{g(u) (u^2 g''(u) + u g'(u) - g(u))}{u (u g'(u) + g(u))^2 (u g'(u) - g(u))} du, \quad (3.7.127)$$

fazendo:

$$g(u) = g(x) = x^p; \quad (3.7.128)$$

$$\Rightarrow g'(u) = g'(x) = p x^{p-1}; \quad (3.7.129)$$

$$\Rightarrow g''(u) = g''(x) = p(p-1)x^{p-2}. \quad (3.7.130)$$

Substituindo as identidades (3.7.128), (3.7.129) e (3.7.130), em (3.7.127), obtemos:

$$\begin{aligned} \sigma(\tau) &= \int_{\tau}^{r_0} \frac{x^p (x^2 p(p-1)x^{p-2} + p x^{p-1} - x^p)}{(p x^{p-1} + x^p)^2 (p x^{p-1} - x^p)} dx \\ &= \int_{\tau}^{r_0} \frac{x^{2p} (p+1)(p-1)}{x^{2p} x^p (p+1)(p+1)(p-1)} dx \\ &= \int_{\tau}^{r_0} \frac{1}{x^p (p+1)} dx \\ \Rightarrow &= \frac{1}{p^2 - 1} \left[\frac{1}{\tau^{p-1}} - \frac{1}{r_0^{p-1}} \right], \end{aligned} \quad (3.7.131)$$

da expressão (3.7.125) que diz,

$$\phi(v) = \frac{2v}{vg'(v) + g(v)} + 4\sigma(v), \quad (3.7.132)$$

daí tem-se:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{2x}{xp x^{p-1} + x^p} + \frac{4}{(p^2 - 1) \tau^{p-1}} - \frac{4}{(p^2 - 1) r_0^{p-1}} \\ &= \frac{2(p-1)x^p + 4x^p}{x^p(p^2 - 1)x^{p-1}} - \frac{4}{(p^2 - 1)r_0^{p-1}} \\ &= \frac{2}{(p-1)x^{p-1}} - \frac{4}{(p^2 - 1)r_0^{p-1}} \end{aligned} \quad (3.7.133)$$

fazendo,

$$C = \frac{4}{(p^2 - 1)r_0^{p-1}}$$

logo, (3.7.133) fica da seguinte forma:

$$\phi(x) = \frac{2}{(p-1)x^{p-1}} - C. \quad (3.7.134)$$

Mas, como:

$$z(t) = \phi^{-1}\left(\frac{t}{T_0}\right),$$

dai,de (3.7.134) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{t}{T_0} &= \frac{2}{(p-1)z^{p-1}(t)} - C \\ z^{p-1}(t) &= \frac{2}{p-1} \left(\frac{CT_0 + t}{T_0} \right) \end{aligned}$$

dai segue que:

$$z(t) = \left(\frac{2}{p-1} \right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{CT_0 + t}{T_0} \right)^{-\frac{1}{p-1}} \quad (3.7.135)$$

$$z^2(t) = \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{2}{p-1}} \left(\frac{CT_0+t}{T_0}\right)^{-\frac{2}{p-1}}. \quad (3.7.136)$$

Mas, de (3.7.128) e (3.7.129), obtemos respectivamente,

$$g(z(t)) = \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{CT_0+t}{T_0}\right)^{-\frac{p}{p-1}}, \quad (3.7.137)$$

$$g(z(t)) = p \left[\left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{p-1}{p-1}} \left(\frac{CT_0+t}{T_0}\right)^{-\frac{p-1}{p-1}} \right], \quad (3.7.138)$$

e mais,

$$z(t)g'(z(t)) + g(z(t)) = \left[\left(\frac{2}{p+1}\right) \left(\frac{CT_0+t}{T_0}\right) \right]^{-\frac{p}{p-1}} (p+1), \quad (3.7.139)$$

$$z(t)g'(z(t)) - g(z(t)) = \left[\left(\frac{2}{p+1}\right) \left(\frac{CT_0+t}{T_0}\right) \right]^{-\frac{p}{p-1}} (p-1) \quad (3.7.140)$$

logo, temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{z(t)g'(z(t)) - g(z(t))}{z(t)g'(z(t)) + g(z(t))} &= \frac{\left[\left(\frac{2}{p+1}\right) \left(\frac{CT_0+t}{T_0}\right) \right]^{-\frac{p}{p-1}} (p-1)}{\left[\left(\frac{2}{p+1}\right) \left(\frac{CT_0+t}{T_0}\right) \right]^{-\frac{p}{p-1}} (p+1)} \\ &= \frac{p-1}{p+1}, \end{aligned} \quad (3.7.141)$$

agora,

$$z^2(t) \frac{z(t)g'(z(t)) - g(z(t))}{z(t)g'(z(t)) + g(z(t))} = \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{2}{p-1}} \left(\frac{CT_0+t}{T_0}\right)^{-\frac{2}{p-1}} \frac{p-1}{p+1}. \quad (3.7.142)$$

Da, estimativa, (A.0.40), obtemos:

$$E(t) \leq 2\beta \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{2}{p-1}} \left(\frac{CT_0+t}{T_0}\right)^{-\frac{2}{p-1}} \frac{p-1}{p+1}. \quad (3.7.143)$$

Agora, note que para p muito grande:

$$\frac{p-1}{p+1} = \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 + \frac{1}{p}} = 1$$

$$\frac{1}{\left(\frac{CT_0+t}{T_0}\right)^{\frac{2}{p-1}}} \leq \frac{1}{t^{\frac{2}{p-1}}}$$

$$\left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{2}{p-1}} = {}^{p-1}\sqrt{\frac{4}{(p+1)^2}} < 1$$

daí, obtemos:

$$E(t) \leq \beta \frac{1}{t^{\frac{2}{p-1}}} = \beta_{E(0)} t^{-\frac{2}{p-1}}. \quad (3.7.144)$$

Exemplo 3.2 (O Caso exponencial). *Seja g definida por $g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, onde $p > 1$ em $(0, r_0]$, então:*

$$E(t) \leq \beta_{E(0)} (\ln(t))^{-2}$$

para t suficientemente grande.

Prova

Vamos determinar $\sigma(t)$, temos que:

$$g(u) = e^{-\frac{1}{u}} \quad (3.7.145)$$

$$g'(u) = \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{u^2} \quad (3.7.146)$$

$$g''(u) = \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{u^4}. \quad (3.7.147)$$

Substituindo, (3.7.145), (3.7.146) e (3.7.147) em (3.7.127), obtemos:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \int_{\tau}^{r_0} \frac{\frac{e^{-\frac{2}{u}}}{u^2} (1 - u - u^2)}{\frac{e^{-\frac{1}{u}}}{u} \frac{e^{-\frac{2}{u}}}{u^2} (1 + u)^2 (1 - u)} du \\ &= \int_{\tau}^{r_0} I(u) du.\end{aligned}\tag{3.7.148}$$

Onde,

$$I(u) = \frac{ue^{\frac{1}{u}} (1 - u - u^2)}{(1 + u)^2 (1 - u)}.\tag{3.7.149}$$

A função I , é estritamente crescente em $(0, r_0]$. Definimos a seguinte função:

$$k(u) = -u^3 e^{\frac{1}{u}}.$$

É fácil ver que $I(u)$ é equivalente a $k'(u)$, uma vez que:

$$\begin{aligned}k'(u) &= -3u^2 e^{\frac{1}{u}} - \frac{u^3 e^{\frac{1}{u}}}{u^2} \\ &= -3u^2 e^{\frac{1}{u}} - ue^{\frac{1}{u}} \\ \Rightarrow k'(u) &= ue^{\frac{1}{u}} (-1 - 3u).\end{aligned}\tag{3.7.150}$$

Portanto existem constantes positivas C_1 e C_2 positivas tais que:

$$C_1 k'(u) \leq I(u) \leq C_2 k'(u), \quad \forall u \in (0, r_0].$$

Temos que $\forall i = 1, 2$.

$$\sigma_i(t) = C_i \tau^3 e^{\frac{1}{\tau}} + d_i,$$

onde $d_i = C_i k(r_0)$, para $i = 1, 2$. da desigualdade acima deduzimos:

$$\sigma_1(\tau) \leq \sigma(\tau) \leq \sigma_2(\tau), \quad \forall u \in (0, r_0].$$

Definimos:

$$\phi_i(v) = \frac{2v}{vg'(v) + g(v)} + 4\sigma_i(v) \quad (3.7.151)$$

$$\begin{aligned} \frac{2v}{vg'(v) + g(v)} + 4\sigma_1(\tau) &\leq \frac{2v}{vg'(v) + g(v)} + 4\sigma(\tau) \leq \frac{2v}{vg'(v) + g(v)} + 4\sigma_2(\tau), \quad \forall u \in (0, r_0]. \\ &\Downarrow \\ \phi_1(v) &\leq \phi(v) \leq \phi_2(v) \\ &\Downarrow \\ \phi(v) &\leq \phi_2(v) \leq \Psi_2(v), \end{aligned}$$

onde definimos:

$$\Psi_2(v) = C_2 v^2 e^{\frac{1}{v}}, \quad (3.7.152)$$

onde C_2 é uma constante positiva. Assim desde que Ψ_2 decaia para zero, podemos deduzir que $z(t) = \phi^{-1}\left(\frac{t}{T_0}\right)$, daí tem-se:

$$\begin{aligned} \phi^{-1}\left(\frac{t}{T_0}\right) &= z(t) \\ \frac{t}{T_0} &= \phi(z(t)) \leq \Psi_2(z(t)) = C_2 z^2(t) e^{\frac{1}{z(t)}} \\ \frac{t}{T_0} &\leq C_2 z^2(t) e^{\frac{1}{z(t)}}, \quad \text{tome } z(t) = x \\ \frac{t}{T_0} &\leq C_2 x^2(t) e^{\frac{1}{x}} \\ \frac{t}{C_2 T_0} &\leq x^2(t) e^{\frac{1}{x}} \\ \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} &\leq \frac{C_2 T_0}{t}, \quad \text{tome } \theta(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \\ \theta(x) &\leq \frac{C_2 T_0}{t} \\ x &\leq \theta^{-1}\left(\frac{C_2 T_0}{t}\right) \\ \Rightarrow z(t) &\leq \theta^{-1}\left(\frac{C_2 T_0}{t}\right). \end{aligned}$$

Onde, $\theta(x)$ é uma função definida nas proximidades de zero. Assim a energia satisfaz a estimativa (A.0.40).

Agora, note que:

$$z(t) \leq \theta^{-1} \left(\frac{C_2 T_0}{t} \right);$$

$$z^2(t) \leq \left[\theta^{-1} \left(\frac{C_2 T_0}{t} \right) \right]^2;$$

de

$$g(x) = e^{-\frac{1}{x}};$$

e

$$g'(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

obtemos:

$$g(z(t)) \leq e^{-\frac{1}{\theta^{-1} \left(\frac{C_2 T_0}{t} \right)}};$$

e

$$g'(z(t)) \leq -\frac{e^{-\frac{1}{\theta^{-1} \left(\frac{C_2 T_0}{t} \right)}}}{\left[\theta^{-1} \left(\frac{C_2 T_0}{t} \right) \right]^2}$$

$$z(t)g'(z(t)) - g(z(t)) \leq -e^{-\frac{1}{\theta^{-1} \left(\frac{C_2 T_0}{t} \right)}} \left[\frac{1}{\theta^{-1} \left(\frac{C_2 T_0}{t} \right)} - 1 \right] \quad (3.7.153)$$

$$z(t)g'(z(t)) + g(z(t)) \leq -e^{-\frac{1}{\theta^{-1} \left(\frac{C_2 T_0}{t} \right)}} \left[\frac{1}{\theta^{-1} \left(\frac{C_2 T_0}{t} \right)} + 1 \right] \quad (3.7.154)$$

agora, tomando $D = C_2 T_0$, e de (A.0.40), obtemos:

$$E(t) \leq \beta_{E(0)} \left(\theta^{-1} \left(\frac{D}{t} \right) \right)^2, \quad \text{para } t \text{ grande,}$$

onde $\beta_{E(0)}$ é dada em (3.7.111). Agora, usando os mesmos argumentos que de Fatiha Alabau-Boussouira [18], podemos concluir que

$$E(t) \leq \beta_{E(0)} (\ln(t))^{-2}.$$

O que conclui a prova.

Observabilidade Interna Indireta

Neste capítulo estudaremos a observabilidade interna e indireta do seguinte modelo de Bresse homogêneo:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - \kappa_0 l(\omega_x - l\varphi) = 0, \quad (4.0.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \quad (4.0.2)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0(\omega_x - l\varphi)_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \quad (4.0.3)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \omega_x(0, t) = \omega_x(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (4.0.4)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0(\cdot), \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1(\cdot); \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0(\cdot), \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1(\cdot); \\ \omega(\cdot, 0) = \omega_0(\cdot), \quad \omega_t(\cdot, 0) = \omega_1(\cdot); \quad \forall x \in (0, L), \end{aligned} \quad (4.0.5)$$

4.1 Desigualdade Inversa

O resultado principal deste capítulo é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 4.1. *Existe um $T_0 > 0$, tal que, para todo $T > T_0$ e $U^0 = (\varphi^0, \varphi^1, \psi^0, \psi^1, \omega^0, \omega^1) \in (L^2(0, L) \times H^{-1}(0, l)) \times (L^2(0, L) \times [H_*^1(0, L)]')^2$, com $\frac{\rho_1}{\kappa} = \frac{\rho_2}{b}$ e $\kappa = \kappa_0$, existe uma constante positiva K , tal que a solução (φ, ψ, ω) de (4.0.1) – (4.0.5) verifica a seguinte desigualdade:*

$$\int_0^T \int_0^L |\psi|^2 + |\omega|^2 dx dt \geq K \left(|\varphi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + |\psi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 + |\omega^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\omega^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 \right) \quad (4.1.1)$$

onde, K depende de $T, L, \rho_1, \rho_2, \kappa, \kappa_0$, e b .

Para a demonstração deste teorema precisaremos de dois resultados preliminares:

Lema 4.2. *Existe um T_0 , tal que, para todo $T > T_0$ e para todo $U_0 = (\varphi^0, \varphi^1, \psi^0, \psi^1, \omega^0, \omega^1) \in (L^2(0, L) \times H^{-1}(0, l)) \times (L^2(0, L) \times [H_*^1(0, L)]')^2$ com $\frac{\rho_1}{\kappa} = \frac{\rho_2}{b}$ e $\kappa = \kappa_0$, existem constantes positivas C_1 e C_2 tal que a solução (φ, ψ, ω) de (4.0.1) – (4.0.5) que verifica a seguinte desigualdade*

$$C_1 E(0) \leq \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 + |\omega_t|^2 dx dt \leq C_2 E(0) \quad (4.1.2)$$

onde, K depende de $T, L, \rho_1, \rho_2, \kappa, \kappa_0$, e b .

Prova. Multiplicando as equações (4.0.1) – (4.0.3), por $-\kappa^{-1}\psi_x, b^{-1}(\varphi_x + \psi + l\omega)$ e $\kappa_0^{-1}(\omega_x - l\varphi)$, respectivamente, somando-as e em seguida integrando no retângulo $[0, T] \times [0, L]$, onde

$T > 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx dt - \frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_0^T \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \psi_x dx dt \\
 & + \frac{\rho_2}{b} \int_0^T \int_0^L \psi_{tt} (\varphi_x + \psi + l\omega) dx dt + \frac{\kappa}{b} \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx dt \\
 & + \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L \omega_{tt} (\omega_x - l\varphi) dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L \frac{d}{dx} |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt \\
 & + \frac{\kappa l}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) (\omega_x - l\varphi) dx dt = 0.
 \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Agora, somando e subtraindo:

$$\frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L \psi_{tt} (\varphi_x + \psi + l\omega) dx dt \text{ e } \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L \omega_{tt} (\omega_x - l\varphi) dx dt,$$

em (4.1.3) e fazendo os ajustes necessários, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\kappa}{b} \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx dt = \left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^T \int_0^L \psi_{tt} (\varphi_x + \psi + l\omega) dx dt \\
 & + \left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_1}{\kappa_0} \right) \int_0^T \int_0^L \omega_{tt} (\omega_x - l\varphi) dx dt - \frac{\rho_1}{\kappa} \left[\int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right]_0^T \\
 & + \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt - \frac{\rho_1}{\kappa} \left[\int_0^L \omega_t (\omega_x - l\varphi) dx \right]_0^T \\
 & - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L l \omega_t \varphi_t dx dt - \frac{\rho_1}{\kappa} \left[\int_0^L \varphi_t \psi_x dx \right]_0^T \\
 & + \frac{l\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L \psi_t \omega_t dx dt + \frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_0^T \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \psi_x dx dt \\
 & - \frac{\kappa l}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) (\omega_x - l\varphi) dx dt.
 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Agora, para estimarmos os termos do lado direito de (4.1.4), usaremos a desigualdade de Young, daí temos:

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^T \int_0^L \psi_{tt} (\varphi_x + \psi + l\omega) dx dt \right| \\ & \leq \frac{b}{\kappa} \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \int_0^T \int_0^L |\psi_{tt}|^2 dx dt + \frac{\kappa}{4b} \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{\rho_1}{\kappa_0} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^T \int_0^L \omega_{tt} (\omega_x - l\varphi) dx dt \right| \\ & \leq \frac{6}{\kappa \kappa_0 l} \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_1}{\kappa_0} \right|^2 \int_0^T \int_0^L |\omega_{tt}|^2 dx dt + \frac{\kappa_0 l}{6\kappa} \int_0^T \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{l\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L \psi_t \omega_t dx dt \right| \\ & \leq \frac{l\rho_1}{2\kappa} \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + \frac{l\rho_1}{2\kappa} \int_0^T \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{l\rho_1}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L \omega_t \varphi_t dx dt \right| \\ & \leq \frac{4l^2 \rho_1}{\kappa_0^2 \kappa} \int_0^T \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt + \frac{\rho_1}{4\kappa} \int_0^T \int_0^L |\varphi_t|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\kappa l}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \psi_x dx dt \right| \\
 & \leq \frac{\kappa_0 l}{6\kappa} \int_0^T \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt + \frac{4\kappa^3 l}{\kappa_0^3} \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt.
 \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| -\frac{\kappa l}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)(\omega_x - l\varphi) dx dt \right| \\
 & \leq \frac{\kappa}{2b} \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx dt + \frac{\kappa l}{2\kappa_0} \int_0^T \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt.
 \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Os demais termos de (4.1.4), serão estimados a partir do seguinte argumento: como $E(t)$ é conservada ao longo do tempo, e desde que f seja uma função monótona não-decrescente, temos:

$$\forall S < T \Rightarrow E(S) = E(T) \quad \forall 0 \leq S \leq T$$

$$\forall E(T) = E(0) \Rightarrow f(E(T)) = f(E(0)).$$

dai obtemos,

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{\kappa} \rho_1 \left[f(E(t)) \int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi + \omega) \right]_0^T \right| \\
 & \leq \frac{\rho_1}{\kappa} f(E(T)) \int_0^L |[\psi_t(\varphi_x + \psi + \omega)](T)| + \frac{\rho_1}{\kappa} f(E(0)) \int_0^L |[\psi_t(\varphi_x + \psi + \omega)](0)| \\
 & \leq C [f(E(T))E(T) + f(E(0))E(0)] \leq C_1 [f(E(0))E(0) + f(E(0))E(0)] \\
 & \leq C f(E(0))E(0) \leq CE(0).
 \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

De modo inteiramente análogo, temos:

$$\left| \frac{1}{\kappa_0} \rho_1 \left[f(E(t)) \int_0^L \omega_t (\omega_x - l\varphi) \right]_0^T \right| \leq CE(0). \quad (4.1.12)$$

$$\left| \frac{\rho_1}{\kappa} \left[f(E(t)) \int_0^L \varphi_t \psi_x \right]_0^T \right| \leq CE(0), \quad (4.1.13)$$

Onde, C , é uma constante positiva arbitrária que dependem de L , ρ_1 , ρ_2 , κ , κ_0 e b . Substituindo (4.1.5) à (4.1.13) em (4.1.4), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{3\kappa}{4b} \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx dt \leq \\ & CE(0) + C \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \int_0^T \int_0^L |\psi_{tt}|^2 dx dt + C \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_1}{\kappa_0} \right|^2 \int_0^T \int_0^L |\omega_{tt}|^2 dx dt \\ & + C \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt \\ & + C \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt + \frac{\kappa_0 l}{4\kappa} \int_0^T \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt \\ & + \frac{\rho_1}{4\kappa} \int_0^T \int_0^L |\varphi_t|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Segundo Passo

Seja y a única solução de:

$$\begin{aligned} -y_{xx} &= (\psi + l\omega)_x \quad \text{em } (0, L) \\ y &= 0 \quad \text{em } x = 0, \quad x = L \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

de onde obtemos que:

$$\int_0^L y_x^2 dx \leq C \int_0^L (\psi + l\omega)^2 dx, \quad (4.1.16)$$

$$\int_0^L (\psi + l\omega)^2 dx \leq CE(t). \quad (4.1.17)$$

e

$$\int_0^L |\varphi - y|^2 \leq CE(t). \quad (4.1.18)$$

Multiplicando a primeira equação de (4.0.1), por $\kappa^{-1}(\varphi - y)$ e integrando sobre $[0, T] \times [0, L]$, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L \varphi_t^2 dx dt + \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx dt + \int_0^T \int_0^L ((\psi + l\omega)^2 - y_x^2) dx dt = \\ & - \frac{\rho_1}{\kappa} \left[\int_0^L \varphi_t(\varphi - y) dx \right]_0^T - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L \varphi_t y_t dx dt + \frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_0^T \int_0^L (\omega_x - l\varphi)(\varphi - y) dx dt. \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Para estimar o lado direito de (4.1.19) precisamos estimar a norma de $(\varphi - y)$ em $L^2(0, L)$. Para isto, procederemos da seguinte forma: Uma vez que $(\varphi - y) = 0$ em $x = 0$ e $x = L$ da desigualdade de Poincaré temos:

$$\int_0^L |\varphi - y|^2 dx \leq C \int_0^L |(\varphi - y)_x|^2 dx \quad (4.1.20)$$

porém, notando que

$$(\varphi - y)_x = (\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{1}{L} \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx$$

temos

$$\int_0^L |(\varphi - y)_x|^2 \leq C \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx \leq CE(t). \quad (4.1.21)$$

Estimando os termos do lado direito em (4.1.19), obtemos:

$$\left| \frac{\rho_1}{\kappa} \left[\int_0^L \varphi_t(\varphi - y) dx \right]_0^T \right| \leq CE(0), \quad (4.1.22)$$

$$\left| \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T f(E(t)) \int_0^L \varphi_t y_t dx dt \right| \leq \frac{\rho_1}{2\kappa} \int_0^T f(E(t)) \int_0^L |\varphi_t|^2 dx dt + CE(0) \quad (4.1.23)$$

e

$$\left| \frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_0^T f(E(t)) \int_0^L (\omega_x - l\varphi)(\varphi - y) dx dt \right| \leq \frac{\kappa_0 l}{16\kappa} \int_0^T f(E(t)) \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt + CE(0). \quad (4.1.24)$$

Substituindo (4.1.22) à (4.1.24) em (4.1.19), obtemos.

$$\frac{\rho_1}{2\kappa} \int_0^T \int_0^L |\varphi_t|^2 dx dt + \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx dt \leq CE(0) + \frac{\kappa_0 l}{16\kappa} \int_0^T \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt. \quad (4.1.25)$$

Terceiro Passo

Multiplicando (4.0.2) por $b^{-1}\psi$ e integrando sobre $[0, T] \times [0, L]$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt &= -\frac{\rho_2}{b} \left[\int_0^L \psi_t \psi dx \right]_0^T \\ &+ \frac{\rho_2}{b} \int_0^T \int_0^L \psi_t^2 dx dt + \frac{\kappa}{b} \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) \psi dx dt. \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

Agora, multiplicando a equação (4.0.3) por ψ e integrando em $[0, T] \times [0, L]$, encontramos

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa}{b} \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) \psi dx dt &= \frac{1}{bl} \int_0^T \int_0^L (\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0 (\omega_x - l\varphi)_x) \psi dx dt \\ &= - \left[\int_0^L \omega_t \psi dx \right]_0^T - \int_0^T \int_0^L \omega_t \psi_t dx dt \\ &+ \frac{\kappa_0}{bl} \int_0^T \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \psi_x dx dt. \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

Substituindo, (4.1.27), em (4.1.26), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt &= -\frac{\rho_2}{b} \left[\int_0^L \psi_t \psi dx \right]_0^T \\ &+ \frac{\rho_2}{b} \int_0^T \int_0^L \psi_t^2 dx dt - \left[\int_0^L \omega_t \psi dx \right]_0^T \\ &- \int_0^T \int_0^L \omega_t \psi_t dx dt + \frac{\kappa_0}{bl} \int_0^T \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \psi_x dx dt. \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt &\leq CE(0) + C \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt \\ &+ \frac{\kappa_0}{2bl} \int_0^T \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

Quarto Passo

Multiplicando a equação (4.0.3), por $\kappa^{-1}(\omega_x - l\varphi)$ e integrando sobre $[0, T] \times [0, L]$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L \varphi_{tt}(\omega_x - l\varphi) dx dt + \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)(\omega_x - l\varphi)_x dx dt \\ - \frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_0^T \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt = 0. \end{aligned}$$

desde que

$$(\omega_x - l\varphi)_x = \frac{\rho_1}{\kappa_0} \omega_{tt} + \frac{\kappa l}{\kappa_0} (\varphi_x + \psi + l\omega),$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L \varphi_{tt}(\omega_x - l\varphi) dx dt + \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) \omega_{tt} dx dt \\ + \frac{\kappa l}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx dt - \frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_0^T \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt = 0 \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

note que

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L \varphi_{tt}(\omega_t - l\varphi) dx dt &= \left[\frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^L \varphi_t(x, t)(\omega_x(x, t) - l\varphi(x, t)) dx \right]_0^T \\ &- \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L \varphi_t \omega_{xt} dx dt + \frac{\rho_1 l}{\kappa} \int_0^T \int_0^L |\varphi_t|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L \varphi_x \omega_{tt} dx dt &= \left[\frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_0^L \varphi_x(x, t) \omega_t(x, t) dx \right]_0^T \\ &- \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L \varphi_{xt} \omega_t dx dt, \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L \psi \omega_{tt} dx dt &= \left[\frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_0^L \psi(x, t) \omega_t(x, t) dx \right]_0^T \\ &- \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_S^T f(E(t)) \int_0^L \psi_t \omega_t dx dt \end{aligned} \quad (4.1.33)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1 l}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L \omega \omega_{tt} dx dt &= \left[\frac{\rho_1 l}{\kappa_0} f(E(t)) \int_0^L \omega(x, t) \omega_t(x, t) dx \right]_0^T \\ &- \frac{\rho_1 l}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

Substituindo, (4.1.31) – (4.1.34) em (4.1.30), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_0^T \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt &= \left[\frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^L \varphi_t(x, t) (\omega_x(x, t) - l\varphi(x, t)) dx \right]_0^T \\
&- \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L \varphi_t \omega_{xt} dx dt + \frac{\rho_1 l}{\kappa} \int_0^T \int_0^L |\varphi_t|^2 dx dt \\
&+ \left[\frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_0^L \varphi_x(x, t) \omega_t(x, t) dx \right]_0^T - \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L \varphi_{xt} \omega_t dx dt \\
&+ \left[\frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_0^L \psi(x, t) \omega_t(x, t) dx \right]_0^T - \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L \psi_t \omega_t dx dt \\
&+ \left[\frac{\rho_1 l}{\kappa_0} \int_0^L \omega(x, t) \omega_t(x, t) dx \right]_0^T + \frac{\kappa l}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx dt \\
&- \frac{\rho_1 l}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt. \tag{4.1.35}
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa_0 l}{\kappa} \int_0^T \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx dt &\leq CE(0) \\
&+ C \int_0^T \int_0^L |\omega_t|^2 dx dt + C \int_S^T f(E(t)) \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt \\
&+ \left(\frac{\kappa l}{\kappa_0} + \frac{\kappa}{8b} \right) \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx dt \\
&\underbrace{- \frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L \varphi_{xt} \omega_t dx dt - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L \varphi_t \omega_{xt} dx dt}_{:= I_3}. \tag{4.1.36}
\end{aligned}$$

Somando convenientemente as desigualdades (4.1.14), (4.1.25), (4.1.29) , (4.1.35) e notando que o sistema é conservativo obtemos:

$$\begin{aligned}
 TE(0) &\leq CE(0) + C \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \int_0^T \int_0^L |\psi_{tt}|^2 dxdt + C \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_1}{\kappa_0} \right|^2 \int_0^T \int_0^L |\omega_{tt}|^2 dxdt \\
 &+ C \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dxdt + C \int_0^T \int_0^L |\omega_t|^2 dxdt \\
 &- \underbrace{\frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L \varphi_{xt} \omega_t dx dt - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L \varphi_t \omega_{xt} dx dt}_{:=I_3}.
 \end{aligned}$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned}
 (T - C)E(0) &\leq +C \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \int_0^T \int_0^L |\psi_{tt}|^2 dxdt + C \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_1}{\kappa_0} \right|^2 \int_0^T \int_0^L |\omega_{tt}|^2 dxdt \\
 &+ C \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dxdt + C \int_0^T \int_0^L |\omega_t|^2 dxdt \\
 &- \underbrace{\frac{\rho_1}{\kappa_0} \int_0^T \int_0^L \varphi_{xt} \omega_t dx dt - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^T \int_0^L \varphi_t \omega_{xt} dx dt}_{:=I_3}.
 \end{aligned}$$

De $\frac{\rho_1}{\kappa} = \frac{\rho_2}{b}$, $\kappa = \kappa_0$ e usando (3.9) em I_3 , temos

$$(T - C)E(0) \leq +C \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dxdt + C \int_0^T \int_0^L |\omega_t|^2 dxdt$$

(4.1.37)

de onde segue que:

$$(T - C)E(0) \leq C \int_0^T \int_0^L [|\psi_t|^2 + |\omega_t|^2] dxdt.$$

Escolhendo $T_0 = C$, segue a conclusão do Lema. ■

Lema 4.3. Para $(\varphi^1, \psi^1, \omega^1) \in H^{-1}(0, L) \times ([H_*^1(0, L)]')^2$, o sistema

$$-\kappa(u_{xx} + v_x + lz_x) - \kappa_0 l(z_x - lv) = -\rho_1 \varphi^1, \quad (4.1.38)$$

$$-bv_{xx} + (u_x + v + lz) = -\rho_2 \psi^1, \quad (4.1.39)$$

$$-\kappa_0(z_{xx} - lv_x) + \kappa l(u_x + v + lz) = -\rho_1 \omega^1, \quad (4.1.40)$$

$$u(0) = u(L) = v_x(0) = v_x(L) = z_x(0) = z_x(L) = 0. \quad (4.1.41)$$

admite uma única solução (u, v, z) em $\mathcal{F} := H_0^1(0, l) \times [H_*^1(0, L)]^2$;

Prova. Multiplicando as equações (4.1.38) por \bar{u} (4.1.38) por \bar{u} , e (4.1.40) por \bar{z} , e integrando de $[0, L]$, obtemos a seguinte equivalência:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(\kappa(u_x + v + lz)(\bar{u}_x + \bar{v} + l\bar{z}) + bv_x \bar{v}_x + \kappa_0(z_x - lv)(\bar{z}_x + l\bar{u}) \right) dx \\ &= \langle -\rho_1 \varphi^1, \bar{u} \rangle_{H^{-1}(0,L), H_0^1(0,L)} + \langle -\rho_2 \psi^1, \bar{v} \rangle_{[H_*^1(0,L)]', H_*^1(0,L)} + \langle -\rho_1 \omega^1, \bar{z} \rangle_{[H_*^1(0,L)]', H_*^1(0,L)}. \end{aligned} \quad (4.1.42)$$

De onde definimos o seguinte produto interno, em \mathcal{F} por:

$$\begin{aligned} \langle (u_1, v_2, z_1), (u_2, v_2, z_2) \rangle_{\mathcal{F}} &:= \int_0^L \left(\kappa(u_{1x} + v_1 + lz_1)(u_{2x} + v_2 + lz_2) \right. \\ &\quad \left. + bv_1 v_2 + \kappa_0(z_{1x} - lv_1)(z_{2x} - lv_2) \right) dx, \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

onde, $(u_1, v_2, z_1), (u_2, v_2, z_2) \in \mathcal{F}$. Além disso, da desigualdade de Poincaré, podemos verificar que a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ é equivalente a norma usual em \mathcal{F} .

Definimos agora,

$$\begin{aligned}
 a\left((u, v, z), (\bar{u}, \bar{v}, \bar{z})\right) &:= \kappa \int_0^L (u_x + v + lz) (\bar{u}_x + \bar{v} + l\bar{z}) \, dx + b \int_0^L v_x \bar{v}_x \, dx \\
 &+ \kappa_0 \int_0^L (z_x - lv) (\bar{z}_x + l\bar{u}) \, dx
 \end{aligned}$$

onde, a é uma forma bilinear contínua e coerciva em \mathcal{F} para a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$, com a seguinte desigualdade:

$$\left(\sqrt{a}\sqrt{\bar{a}} + \sqrt{c}\sqrt{\bar{c}} + \sqrt{d}\sqrt{\bar{d}}\right) \leq \sqrt{a+c+d}\sqrt{\bar{a}+\bar{c}+\bar{d}}; \quad \forall a, \bar{a}, c, \bar{c}, d, \bar{d} \in \mathcal{F}.$$

Por consequência do Lema de Lax-Milgram, existe uma única solução $(u, v, z) \in \mathcal{F}$ de (4.1.42), para $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{z}) \in \mathcal{F}$. Assim, podemos escolher $\bar{u} = \bar{v} = \bar{z} = 0$, obtemos a igualdade no sentido distribucional, o que completa a prova. ■

Agora, que estamos de posse desses dois resultados, vamos demonstrar o teorema (4.1).

Prova. Sendo $U^0 \in (L^2(0, L) \times H^{-1}(0, l)) \times (L^2(0, L) \times [H_*^1(0, L)]')^2$ e (u, v, z) solução do sistema (4.1.38) – (4.1.41), iremos adaptar o método multiplicativo usado introduzido por J. Lions em [12]. Se (φ, ψ, ω) é solução do sistema (4.0.1) – (4.0.5), com dados iniciais $(\varphi^0, \varphi^1, \psi^0, \psi^1, \omega^0, \omega^1)$, então os funcionais

$$\left(\eta(x, t) = \int_0^t \varphi(x, s) ds + u(x); \theta(x, t) = \int_0^t \psi(x, s) ds + v(x); \xi(x, t) = \int_0^t \omega(x, s) ds + z(x)\right), \tag{4.1.44}$$

é uma solução de (4.0.1) – (4.0.5) com dados iniciais $(u, \varphi^0, v, \psi^0, z, \omega^0)$. Assim pelo Lema (4.2), temos

$$(T - C) \int_0^T \int_0^L |\theta_t|^2 + |\xi_t|^2 dx dt \geq C_1 \left(|\varphi^0|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^{-1}}^2 + |\psi^0|_{L^2}^2 + \|v\|_{[H_*^1]'}^2 + |\omega^0|_{L^2}^2 + \|z\|_{[H_*^1]'}^2 \right). \tag{4.1.45}$$

Por outro lado, sabemos que $-\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ é um isomorfismo de $H_0^1(0, L)$ em $H^{-1}(0, L)$ e uma aplicação linear e contínua de $H_*^1(0, L)$ em $[H_*^1(0, L)]'$ isto quer dizer, que existe uma constante positiva M e N tais que

$$\|(-\Delta)v\|_{[H_*^1(0,L)]'} \leq M\|v\|_{H_*^1(0,L)}$$

e

$$\|(-\Delta)z\|_{[H_*^1(0,L)]'} \leq N\|z\|_{H_*^1(0,L)}$$

.

Então temos, $\|u\|_{H_0^1(0,l)} \geq c\| -u_{xx}\|_{H^{-1}(0,L)}$, $\|v\|_{H_*^1(0,l)} \geq c\| -v_{xx}\|_{[H_*^1(0,L)]'}$ e $\|z\|_{H_*^1(0,l)} \geq c\| -z_{xx}\|_{[H_*^1(0,L)]'}$ daí segue que:

$$\underbrace{\|u\|_{H_0^1} + \|v\|_{H_*^1} + \|z\|_{H_*^1}}_{:=I} \geq c\| -u_{xx}\|_{H^{-1}(0,L)} + c\| -v_{xx}\|_{[H_*^1(0,L)]'} + c\| -z_{xx}\|_{[H_*^1(0,L)]'} \quad (4.1.46)$$

$$(4.1.47)$$

mas, de (4.1.38) – (4.1.41), temos:

$$\begin{aligned}
 I &\geq c \left\| \frac{\rho_1}{\kappa} \varphi^1 - v_x - lz_x - l(z_x - lv) \right\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + c \left\| \frac{\rho_2}{b} \psi^1 + \frac{\kappa}{b} (u_x + v + lz) \right\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 \\
 &+ c \left\| \frac{\rho_1}{\kappa_0} \omega^1 + lv_x + l(u_x + v + lz) \right\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 \\
 &\geq c \left(\|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 + \|\omega^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 \right) - c \|v_x\|_{H^{-1}(0,L)}^2 - c \|z_x\|_{H^{-1}(0,L)}^2 \\
 &- c \|z_x - lv\|_{H^{-1}(0,L)}^2 - c \|u_x + v + lz\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 - c \|v_x\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 - c \|u_x + v + lz\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 \\
 &\geq c \left(\|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 + \|\omega^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 \right) \\
 &- c \left(\|v_x\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \|z_x\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \|z_x - lv\|_{H^{-1}(0,L)}^2 \right) \\
 &- c \left(\|v_x\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 + \|u_x + v + lz\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 \right) \\
 &\geq c \left(\|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 + \|\omega^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 \right) \\
 &- c \left(|v_x|_{L^2(0,L)}^2 + |z_x|_{L^2(0,L)}^2 + |z_x - lv|_{L^2(0,L)}^2 \right) \\
 &- c \left(|v_x|_{L_*^2(0,L)}^2 + |u_x + v + lz|_{L_*^2(0,L)}^2 \right) \\
 &\geq c \left(\|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 + \|\omega^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 \right) \\
 &- c \left(|u_x|_{L^2(0,L)}^2 + |v_x|_{L_*^2(0,L)}^2 + |v|_{L_*^2(0,L)}^2 + |z_x|_{L_*^2(0,L)}^2 \right) \\
 &\geq c \left(\|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 + \|\omega^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 \right) \\
 &- c \left(\|u\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|v\|_{H_*^1(0,L)}^2 + \|z\|_{H_*^1(0,L)}^2 \right),
 \end{aligned}$$

logo, obtemos

$$(c + 1) \left(\|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{H_*^1}^2 + \|z\|_{H_*^1}^2 \right) \geq c \left(\|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 + \|\omega^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 \right) \quad (4.1.48)$$

e, por consequência,

$$\|u\|_{H_0^1} + \|v\|_{H_*^1} + \|z\|_{H_*^1} \geq \frac{c}{1+c} \left(\|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 + \|\omega^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 \right) \quad (4.1.49)$$

Por outro lado, de (4.1.44), tem-se que:

$$\int_0^T \int_0^L |\theta_t|^2 + |\xi_t|^2 dxdt = \int_0^T \int_0^L |\psi|^2 + |\omega|^2 dxdt, \quad (4.1.50)$$

agora, substituindo (4.1.50) e (4.1.49), em (4.1.45), obtemos:

$$(T-C) \int_0^T \int_0^L |\psi|^2 + |\omega|^2 dxdt \geq C_1 \left[\frac{c}{1+c} \left(\|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 + \|\omega^1\|_{[H_*^1(0,L)]'}^2 \right) + \left(|\varphi^0|_{L^2(0,L)}^2 + |\psi^0|_{L^2(0,L)}^2 + |\varphi^0|_{L^2(0,L)}^2 \right) \right]$$

o que equivale a:

$$\int_0^T \int_0^L |\psi|^2 + |\omega|^2 dxdt \geq \left(\frac{1}{T-C} \right) \left(\frac{C}{1+c} \right) \left(|\varphi^0|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^{-1}}^2 + |\psi^0|_{L^2}^2 + \|v\|_{[H_*^1]'}^2 + |\omega^0|_{L^2}^2 + \|z\|_{[H_*^1]'}^2 \right)$$

fazendo $K = \min \left\{ \left(\frac{1}{T-C} \right), \left(\frac{C_1 c}{1+c} \right), \left(\frac{1}{T-C} \right) \left(\frac{C_1 c}{1+c} \right) \right\}$ obtemos:

$$\int_0^T \int_0^L |\psi|^2 + |\omega|^2 dxdt \geq K \left(|\varphi^0|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^{-1}}^2 + |\psi^0|_{L^2}^2 + \|v\|_{[H_*^1]'}^2 + |\omega^0|_{L^2}^2 + \|z\|_{[H_*^1]'}^2 \right)$$

■

CAPÍTULO 5

Trabalhos Futuros

No decorrer destes três anos e a partir das experiências obtidas através de estudos e observações, não só das técnicas usadas no desenvolvimento de minha tese, como também outras análises em vários artigos, que nos levaram a uma certa formação, a qual, faz com que possamos ter as algumas perspectivas, que dará ao início de uma nova etapa na minha vida acadêmica.

Dois temas não foram abordados em nosso trabalho, temas este, que estão quase prontos e que gostaríamos de amadurecê-los e submetê-los para análise posterior em revistas, que são:

1. A Observabilidade Interna Indireta e o Controle exato para o Sistema de Bresse.
2. A Observabilidade para um modelo de Timoshenko Transmissão com dissipação linear arbitrários e localizados.
3. A Observabilidade para um modelo de Timoshenko Transmissão com dissipação não linear arbitrários e localizados.
4. Usar as mesmas técnicas de nosso trabalho para os modelos de Bresse transmissão e Timoshenko transmissão.

APÊNDICE A

Teoremas de Comportamento Assintótico

Teorema A.1. *Suponhamos que E seja uma função não-crescente absolutamente contínua, $E : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, satisfazendo, $0 < E < \eta$ e a desigualdade*

$$\int_S^T f(E(t))F^{-1}(E(t))dt \leq T_0E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \quad (\text{A.0.1})$$

Então, E Satisfaz a seguinte estimativa:

$$E(t) \leq F\left(\frac{1}{\Psi_r^{-1}\left(\frac{t}{T_0}\right)}\right), \quad \forall t \geq \frac{T_0}{F_{-1}(r)}, \quad (\text{A.0.2})$$

onde r e um número real tal que

$$\frac{1}{T_0} \int_0^\infty E(\tau)F^{-1}(E(\tau))d\tau \leq r < \eta.$$

Assim, temos o $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$ a taxa de decaimento a ser dado em (3.7.120).

Prova. Definimos as funções Φ e M , por:

$$\Phi(t) = \int_t^{+\infty} M(E(\tau))d\tau, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{A.0.3})$$

$$M(y) = yF^{-1}(y)d, \quad \forall y \geq 0 \quad (\text{A.0.4})$$

então, graças a (A.0.1), temos

$$\Phi(t) \leq T_0 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{A.0.5})$$

Além disso, uma vez que a função F^{-1} é estritamente não-negativa e M é uma função crescente e não-negativa, assim derivando (3.7.119), e usando (A.0.5),obtemos:

$$-\Phi'(s) = M(E(s)) \geq M\left(\frac{\Phi(s)}{T_0}\right), \quad \forall s \geq 0.$$

daí temos:

$$-\frac{\Phi'(s)}{T_0} \geq \frac{1}{T_0} M\left(\frac{\Phi(s)}{T_0}\right), \quad \forall s \geq 0.$$

Integrando esta última desigualdade de 0 até t , obtemos:

$$\int_t^0 \frac{\Phi'(s)}{T_0 M\left(\frac{\Phi(s)}{T_0}\right)} \geq \frac{1}{T_0}, \quad \forall s \geq 0.$$

Fazendo uma mudança de variável,

$$y = \frac{\Phi(s)}{T_0} \implies \frac{dy}{dt} = \frac{\Phi'(s)}{T_0}$$

daí, tem-se:

$$y = \frac{1}{T_0} \int_t^{+\infty} M(E(\tau))d\tau$$

$$t = 0, \quad y = B = \frac{1}{T_0} \int_0^{+\infty} M(E(\tau)) d\tau = \frac{1}{T_0} \int_0^{+\infty} E(\tau) F^{-1}(E(\tau)) d\tau \leq E(0) < \eta$$

$$t = t, \quad y = \frac{\Phi(t)}{T_0}$$

daí tem-se:

$$\int_{\frac{\Phi}{T_0}}^B \frac{dy}{M(y)} \geq \frac{t}{T_0}, \quad \forall t \geq 0,$$

onde B é definido por:

$$0 < B = \frac{1}{T_0} \int_0^{+\infty} E(\tau) F^{-1}(E(\tau)) d\tau \leq E(0) < \eta.$$

Assim, uma vez que M é positiva em $(0, \eta]$, deduzimos que para todo $r \in [B, \eta]$, temos:

$$\int_{\frac{\Phi}{T_0}}^B \frac{dy}{M(y)} \geq \frac{t}{T_0}, \quad \forall t \geq 0, \tag{A.0.6}$$

da definição de Φ_r ,

$$\Phi_r(\tau) = \int_{\tau}^r \frac{dy}{y F^{-1}(y)}. \tag{A.0.7}$$

Por outro lado, uma vez que F^{-1} é estritamente crescente em $[0, \eta)$, deduzimos que para todo $r \in [B, \eta]$, e todo $\tau \in (0, r]$, temos:

$$\begin{aligned} F^{-1}(r) &\geq F^{-1}(y) \\ \frac{1}{y F^{-1}(r)} &\leq \frac{1}{y F^{-1}(y)} = \frac{1}{M(y)} \\ \implies \frac{1}{y F^{-1}(r)} &\leq \frac{1}{M(y)} \quad \forall y \in [\tau, r]. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\int_{\tau}^r \frac{1}{yF^{-1}(r)} dy \leq \int_{\tau}^r \frac{1}{M(y)} dy$$

$$\frac{1}{F^{-1}(r)} (Ln r - Ln \tau) \leq \Phi_r(\tau), \quad 0 < \tau \leq r.$$

Assim, $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \Phi_r(\tau) = +\infty$ se mantém. Assim, $\Phi_r : (0, r] \rightarrow [0, +\infty)$ é uma função estritamente decrescente juntamente com (??), temos a seguinte estimativa.

$$\Phi_r \left(\frac{\Phi(t)}{T_0} \right) \geq \frac{t}{T_0}$$

$$\implies \frac{\Phi(t)}{T_0} \leq \Phi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right)$$

$$\implies \Phi(t) \leq T_0 \Phi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right), \quad \forall t \geq 0.$$

Em particular, uma vez que M é crescente e não negativa em $[0, \eta]$, enquanto que E é não crescente, deduzimos que

$$\theta M(E(t + \theta)) \leq \int_t^{t+\theta} M(E(\tau)) d\tau \leq \Phi(t) \leq T_0 \Phi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \theta > 0. \quad (\text{A.0.8})$$

Assim, temos a seguinte estimativa:

$$E(t) \leq M^{-1} \left(\min_{\theta \in (0, t]} \left(\frac{T_0}{\theta} \gamma_t(\theta) \right) \right) \quad (\text{A.0.9})$$

onde,

$$\gamma_t(\theta) = \frac{1}{\theta} \Phi_r^{-1} \left(\frac{t - \theta}{T_0} \right), \quad \forall \theta \in (0, t], \quad (\text{A.0.10})$$

tomando $t > 0$ fixo, assim θ^* é um ponto crítico de γ_t , se e somente se, satisfaz a seguinte relação;

$$\begin{aligned} \gamma'_t(\theta^*) &= 0 \\ \Phi_r^{-1} \left(\frac{t - \theta^*}{T_0} \right) - \frac{\theta^*}{T_0 \Phi'_r \left(\Phi_r^{-1} \left(\frac{t - \theta^*}{T_0} \right) \right)} &= 0 \end{aligned}$$

mas

$$\Phi'_r(\tau) = -\frac{1}{M(\tau)}$$

daí tem-se:

$$\Phi_r^{-1} \left(\frac{t - \theta^*}{T_0} \right) = \frac{\theta^*}{T_0} M \left(\Phi_r^{-1} \left(\frac{t - \theta^*}{T_0} \right) \right).$$

Usando a definição de M , deduzimos que θ^* é ponto crítico de γ_t , se e somente se, satisfaz:

$$\Phi_r^{-1} \left(\frac{t - \theta^*}{T_0} \right) = \frac{\theta^*}{T_0} \Phi_r^{-1} \left(\frac{t - \theta^*}{T_0} \right) F^{-1} \left(\Phi_r^{-1} \left(\frac{t - \theta^*}{T_0} \right) \right)$$

$$\frac{T_0}{\theta^*} = F^{-1} \left(\Phi_r^{-1} \left(\frac{t - \theta^*}{T_0} \right) \right) \quad (\text{A.0.11})$$

ou melhor:

$$\frac{\theta^*}{T_0} = \frac{1}{F^{-1} \left(\Phi_r^{-1} \left(\frac{t - \theta^*}{T_0} \right) \right)}$$

de (??) obtemos:

$$\Phi_r \left(\frac{1}{\frac{\theta^*}{T_0}} \right) = \frac{t - \theta^*}{T_0}$$

seja Ψ_r dada por,

$$\Psi_r(z) = z + \Phi_r \left(F \left(\frac{1}{z} \right) \right) \geq z$$

daí temos que

$$\Psi_r \left(\frac{\theta^*}{T_0} \right) = \frac{\theta^*}{T_0} + \frac{t - \theta^*}{T_0} = \frac{t}{T_0}.$$

Onde $\Psi_r : [\frac{1}{F^{-1}(r)}, +\infty) \rightarrow [\frac{1}{F^{-1}(r)}, +\infty)$ definida por $\Psi_r(z) = z + \Phi_r(F(\frac{1}{z}))$ é uma função estritamente crescente, uma vez que Φ_r é estritamente crescente e F também é estritamente crescente, assim para todo $t \geq T_0$ ($\frac{1}{F^{-1}(r)}$), γ_t possui um único ponto crítico $\theta(t)$, que atinge o seu mínimo. E $\theta(t)$ é dado por:

$$\theta(t) = T_0 \Psi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right). \quad (\text{A.0.12})$$

Além disso graças a definição de $\theta(t)$, podemos deduzir que:

$$M^{-1}(T_0 \gamma(\theta(t))) = \Phi_r^{-1} \left(\frac{t - \theta(t)}{T_0} \right) = F \left(\frac{T_0}{\theta(t)} \right).$$

Agora, usando esta última identidade em (A.0.9) juntamente com (??), obtemos:

$$E(t) \leq M^{-1} \left(\min_{\theta \in (0, t]} \left(\frac{T_0}{\theta} \gamma_t(\theta) \right) \right) = M^{-1}(T_0 \gamma(\theta(t))) = F \left(\frac{T_0}{\theta(t)} \right) = F \left(\frac{1}{\Psi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right)} \right)$$

ou seja:

$$E(t) \leq F \left(\frac{1}{\Psi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right)} \right). \quad (\text{A.0.13})$$

Observe que $\Psi_r^{-1}(\tau) \rightarrow +\infty$ quando $\tau \rightarrow +\infty$ e como F é contínua em zero com $F(0) = 0$ concluímos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} F \left(\frac{1}{\Psi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right)} \right) = 0$ o que conclui a demonstração. ■

Teorema A.2 (Comportamento Assintótico). *Sejam g, H, \widehat{H}, F, f e h_i , ($i = 1, 2$), satisfazem as hipóteses e definições (H1) – (H7), respectivamente. Além disso, sejam $T_0 > 0$ um número fixo, e $E : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ a energia associada ao problema (3.2.1) – (3.2.5), uma*

função monótona não-negativa, decrescente e absolutamente contínua em $[0, +\infty)$, definida por (3.4.3). Além disso suponhamos que existe constante positiva β definida em (189), tal que:

$$0 < \frac{E(0)}{2F(H'(r_0^2))} \leq \beta \quad (\text{A.0.14})$$

e

$$\int_S^T f(E(t))F^{-1}\left(\frac{E(t)}{2\beta}\right) dt \leq T_0 E(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \quad (\text{A.0.15})$$

Onde $(\varphi, \psi, \omega, \varphi_t, \psi_t, \omega_t)$ é a solução do problema (3.2.1) – (3.2.3), com condições de fronteiras (3.2.5) associada as condições iniciais $(\varphi_0, \psi_0, \omega_0, \varphi_1, \psi_1, \omega_1)$. Então $E(t)$ satisfaz a taxa de decaimento

$$E(t) \leq 2\beta_{E(0)} z^2(t) \frac{z(t)g'(z(t)) - g(z(t))}{z(t)g'(z(t)) + g(z(t))}, \quad \forall t \geq \frac{T_0}{H'(r_0^2)}, \quad (\text{A.0.16})$$

onde,

$$z(t) = \phi^{-1}\left(\frac{t}{T_0}\right) \quad (\text{A.0.17})$$

e $\phi : (0, r_0] \rightarrow [\frac{1}{H'(r_0^2)}, +\infty]$ é uma função estritamente crescente definida por:

$$\phi(v) = \frac{2v}{vg'(v) + g(v)} + 4\sigma(v), \quad (\text{A.0.18})$$

$\sigma : (0, r_0] \rightarrow (0, r_0]$ é uma função definida pela seguinte expressão integral:

$$\sigma(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_0} \frac{g(u)(u^2g''(u) + ug'(u) - g(u))}{(ug'(u) + g(u))^2(ug'(u) - g(u))}, \quad (\text{A.0.19})$$

para todo $(\varphi_0, \psi_0, \omega_0, \varphi_1, \psi_1, \omega_1) \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L)$, e T_0 não depende de $(\varphi_0, \psi_0, \omega_0, \varphi_1, \psi_1, \omega_1)$.

Prova. Vamos definir

$$\widehat{E}(t) = \frac{E(t)}{2\beta}.$$

Então, pela hipótese (A.0.15), \widehat{E} satisfaz (3.7.119), uma vez que E é uma função não crescente, têm-se:

$$\begin{aligned} 2\beta\widehat{E}(t) &\leq 2\beta\widehat{E}(0) \\ \widehat{E}(t) &\leq \widehat{E}(0) \leq F(H'(r_0^2)) = r_0^2 - \frac{H(r_0^2)}{H'(r_0^2)} < r_0^2. \end{aligned} \quad (\text{A.0.20})$$

Tomando $\eta = r_0^2$. E como $F : [0, +\infty) \rightarrow [0, \eta)$ é uma função estritamente crescente. Definimos B por:

$$0 < B = \frac{1}{T_0} \int_0^\infty \widehat{E}(\tau) F^{-1}(\widehat{E}(\tau)) d\tau \leq \widehat{E}(0) < \eta. \quad (\text{A.0.21})$$

Definimos também $r = F(H'(r_0^2))$, de (A.0.20) e (A.0.21) concluímos que $r \in [B, \eta)$, portanto podemos aplicar o (Teorema – 3.0.8) a E , a partir da definições de B e r , daí tem-se

$$\widehat{E}(t) \leq F\left(\frac{1}{\Psi_r^{-1}\left(\frac{t}{T_0}\right)}\right), \quad \forall t \geq \frac{T_0}{F^{-1}(r)}, \quad (\text{A.0.22})$$

onde $\Psi_r : [\frac{1}{F^{-1}(r)}, +\infty) \rightarrow [\frac{1}{F^{-1}(r)}, +\infty)$ uma função estritamente crescente, definida por $\Psi_r(z) = z + \Phi_r\left(F\left(\frac{1}{z}\right)\right) \geq z, \forall z \geq \frac{1}{F^{-1}(r)}$ e $\Phi_r(\tau) = \int_\tau^r \frac{dy}{yF^{-1}(y)}$. Por outro lado, como F é crescente e de (A.0.21) e (A.0.14), temos:

$$F^{-1}(r) = F^{-1}(F(H'(r_0^2))) = H'(r_0^2),$$

portanto $F(v)$ é dada por

$$F(v) = (H')^{-1}(v) - \frac{H((H')^{-1}(v))}{v}, \quad \forall v \in [0, F^{-1}(r)]. \quad (\text{A.0.23})$$

È fácil ver que F é diferenciável. Assim podemos fazer uma mudança de variável, fazendo $v = F^{-1}(y)$ em (A.0.7), temos

$$\Phi_r(\tau) = \int_\tau^r \frac{dy}{yF^{-1}(y)}$$

$$\begin{aligned} v &= F^{-1}(y) \\ \frac{dv}{dy} &= \frac{1}{F'(y)} \implies dy = F'(y)dv \end{aligned}$$

daí tem-se:

$$\Phi_r \left(F \left(\frac{1}{s} \right) \right) = \int_{\frac{1}{s}}^{F^{-1}(r)} \frac{F'(v)}{yF^{-1}(y)} dv. \quad (\text{A.0.24})$$

de um cálculo simples podemos mostrar que:

$$F'(v) = \frac{H((H')^{-1}(v))}{v^2}. \quad (\text{A.0.25})$$

De fato,

$$\begin{aligned} F'(v) &= [(H')^{-1}(v)]' - \left[\frac{H((H')^{-1}(v))}{v} \right]' \\ &= \frac{1}{H''(v)} - \frac{\left[\frac{v^2}{H''(v)} - H((H')^{-1}(v)) \right]'}{v^2} \\ &= \frac{1}{H''(v)} - \frac{1}{H''(v)} + \frac{H((H')^{-1}(v))}{v^2} \\ \implies F'(v) &= \frac{H((H')^{-1}(v))}{v^2}. \end{aligned}$$

Utilizando (A.0.23) e (A.0.25) em (A.0.24), e fazendo uma mudança de variável, tomando $\tau = (H')^{-1}(v)$, $d\tau = \frac{1}{H''(v)}dv$. quando:

$$v = \begin{cases} \frac{1}{s}, & \implies \tau = (H')^{-1} \left(\frac{1}{s} \right) \\ F^{-1}(r), & \implies \tau = r_0^2 \end{cases} \quad (\text{A.0.26})$$

daí tem-se:

$$\Phi_r \left(F \left(\frac{1}{s} \right) \right) = \int_{(H')^{-1}(\frac{1}{s})}^{r_0^2} \frac{H(\tau)H''(\tau)}{(H'(\tau))^2 (\tau H'(\tau) - H(\tau))} d\tau. \quad (\text{A.0.27})$$

Agora, sabendo-se que

$$H(\tau) = \sqrt{\tau}g(\sqrt{\tau}) \quad (\text{A.0.28})$$

$$\Rightarrow H'(\tau) = \frac{g'(\sqrt{\tau})}{2} + \frac{g(\sqrt{\tau})}{2\sqrt{\tau}}, \quad (\text{A.0.29})$$

calculanco a segunda derivada de $H(\tau)$ obtemos:

$$\begin{aligned} H''(\tau) &= \left[\frac{g'(\sqrt{\tau})}{2} \right]' + \left[\frac{g(\sqrt{\tau})}{2\sqrt{\tau}} \right]' \\ &= \frac{g''(\sqrt{\tau})(\sqrt{\tau})'}{2} + \frac{[g(\sqrt{\tau})]' 2\sqrt{\tau} - g(\sqrt{\tau}) [2\sqrt{\tau}]'}{[2\sqrt{\tau}]^2} \\ &= \frac{g''(\sqrt{\tau})}{4\sqrt{\tau}} + \frac{g''(\sqrt{\tau})}{4\tau} - \frac{g(\sqrt{\tau})}{4\tau\sqrt{\tau}} \\ \Rightarrow H''(\tau) &= \frac{\tau g''(\sqrt{\tau}) + \sqrt{\tau} g'(\sqrt{\tau}) - g(\sqrt{\tau})}{4\tau\sqrt{\tau}}. \end{aligned}$$

Substituindo estes resultados em (A.0.27), obtemos:

$$\Phi_r \left(F \left(\frac{1}{s} \right) \right) = \int_{(H')^{-1}(\frac{1}{s})}^{r_0^2} \frac{2\sqrt{\tau}g(\sqrt{\tau}) \left(\tau g''(\sqrt{\tau}) + \sqrt{\tau} g'(\sqrt{\tau}) - g(\sqrt{\tau}) \right)}{\tau \left(\sqrt{\tau} g'(\sqrt{\tau}) + g(\sqrt{\tau}) \right)^2 \left(\sqrt{\tau} g'(\sqrt{\tau}) - g(\sqrt{\tau}) \right)} d\tau. \quad (\text{A.0.30})$$

Fazendo uma outra mudança de variável:

$u = \sqrt{\tau} \Rightarrow \tau = u^2, d\tau = 2udu$ quando:

$$\tau = \begin{cases} (H')^{-1} \left(\frac{1}{s} \right), & \Rightarrow u = \tau \\ r_0^2, & \Rightarrow u = r_0, \end{cases} \quad (\text{A.0.31})$$

daí tem-se:

$$\Phi_r \left(F \left(\frac{1}{s} \right) \right) = 4 \left(\sqrt{(H')^{-1} \left(\frac{1}{s} \right)} \right) \int_{\tau}^{r_0} \frac{g(u) (u^2 g''(u) + u g'(u) - g(u))}{u (u g'(u) + g(u))^2 (u g'(u) - g(u))} du. \quad (\text{A.0.32})$$

ou melhor:

$$\Phi_r \left(F \left(\frac{1}{s} \right) \right) = 4\sigma(\tau) \left(\sqrt{(H')^{-1} \left(\frac{1}{s} \right)} \right)$$

onde:

$$\sigma(\tau) = \int_{\tau}^{r_0} \frac{g(u) (u^2 g''(u) + u g'(u) - g(u))}{u (u g'(u) + g(u))^2 (u g'(u) - g(u))} du. \quad (\text{A.0.33})$$

Definimos:

$$\phi(v) = \Psi_r \left(\frac{1}{H'(v^2)} \right), \quad \forall v \in (0, r_0]. \quad (\text{A.0.34})$$

Como Ψ_r é uma função estritamente crescente e por outro lado $H' : [0, r_0] \rightarrow (0, H'(r_0^2)]$, e uma função estritamente crescente, assim $\phi : (0, r_0^2] \rightarrow [\frac{1}{H'(r_0^2)}, +\infty)$ é estritamente decrescente, definida em (A.0.18), definimos:

$$s(t) = \Psi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right)$$

e

$$z(t) = \sqrt{(H')^{-1} \left(\frac{1}{s(t)} \right)}, \quad (\text{A.0.35})$$

daí temos:

$$\phi(z(t)) = \frac{2z(t)}{z(t)g'(z(t)) + g(z(t))} + 4\sigma(z(t)), \quad \forall t \geq \frac{T_0}{H'(r_0^2)} \quad (\text{A.0.36})$$

e

$$\phi_r(s(t)) = \phi_r \left(\Phi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right) \right) = \frac{t}{T_0} \quad (\text{A.0.37})$$

Assim, $z(t)$, satisfaz (A.2) e $z(t) \in [0, r_0] \forall t \geq \frac{T_0}{H'(r_0^2)}$, precisamos agora reescrever a taxa de decaimento dada em (A.0.2), para isso note que:

$$\begin{aligned} F \left(\frac{1}{\Psi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right)} \right) &= (H')^{-1} \left(\frac{1}{\Phi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right)} \right) - \frac{H \left[(H')^{-1} \left(\frac{1}{\Phi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right)} \right) \right]}{\frac{1}{\Phi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right)}} \\ &= F(H'(z^2(t))) \end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned} F(H'(z^2(t))) &= F \left[H' \left((H')^{-1} \frac{1}{\Phi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right)} \right) \right] \\ &= F \left(\frac{1}{\Phi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right)} \right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$F \left(\frac{1}{\Psi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right)} \right) = F(H'(z^2(t))) \quad (\text{A.0.38})$$

Por outro lado, $H'(z^2(t)) \leq H'(r_0^2)$ e da definição *D2*, e usando (A.0.22), juntamente com a definição de H' , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{E(t)}{2\beta} &= \widehat{E}(t) \leq F \left(\frac{1}{\Psi_r^{-1} \left(\frac{t}{T_0} \right)} \right) = F(H'(z^2(t))) = z^2(t) - \frac{H(z^2(t))}{H'(z^2(t))} \\ E(t) &\leq 2\beta \left(z^2(t) - \frac{H(z^2(t))}{H'(z^2(t))} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.0.39})$$

mas, note que:

$$\begin{aligned} H(z^2(t)) &= \sqrt{z^2(t)} g \left(\sqrt{z^2(t)} \right) \\ &= z(t) g(z(t)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H'(z^2(t)) &= \frac{g'(z(t))}{2} + \frac{g(z(t))}{2z(t)} \\ &= \frac{z(t)g'(z(t)) + g(z(t))}{2z(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(t) &\leq 2\beta \left(z^2(t) - \frac{H(z^2(t))}{H'(z^2(t))} \right) \\
&\leq 2\beta \left(z^2(t) - \frac{2z^2(t)g(z(t))}{z(t)g'(z(t)) + g(z(t))} \right) \\
&\leq 2\beta \left(z^2(t) \frac{z(t)g'(z(t)) + g(z(t)) - 2g(z(t))}{z(t)g'(z(t)) + g(z(t))} \right)
\end{aligned}$$

$$E(t) \leq 2\beta z^2(t) \frac{z(t)g'(z(t)) - g(z(t))}{z(t)g'(z(t)) + g(z(t))}, \quad (\text{A.0.40})$$

o que conclui a demonstração. ■

le

Referências Bibliográficas

- [1] F. ALABAU-BOUSSOUIRA. Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés. *C.R.Acad. Sci. Paris Sér I Math*, 328:1015–1020, 1999.
- [2] P.CANNARSA F. ALABAU-BOUSSOUIRA and V. KOMORNIK. Indirect internal damping of coupled systems. *J. of Evolution Equations*, 41:35–40, 2004.
- [3] Gomes S. C. M. L. Santos, Rocha M. P. C. Polynomial stability of a coupled system of waves equations weakly dissipative. *Applicable Analysis*, 86:1293–1302, 2007.
- [4] M. L. Santos R. G. C. Almeida. Lack of exponential decay of a coupled system of wave equations with memory. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12:1023–1032, 2011.
- [5] Z. LIU and B. RAO. Energy decay rate of the thermoelastic bresse system. *Zeitschrift für Angewandte Mathematic and Physik*, 60:1–16, 2008.
- [6] RIVERA J.E.M. FATORI, L.H. Rates of decay to thermoelastic bresse system. *Journal of Applied Mathematics*, 75:881–804, 2100.
- [7] RIVERA J.E.M. F. ALABAU-BOUSSOUIRA ALMEIDA JÚNIOR, D.S. Stability to weak dissipative bresse system. *JMAA Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 374:481–498, 2011.

-
- [8] RIVERA J.E.M. FATORI L.H. JUAN, A.P. Bresse system with indefinite damping. *JMAA Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 387:284–290, 2011.
- [9] ALI Wehbe NAHLA, Noun. Stabilisation faible interne locale de système élastique de bresse. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 350:493–498, 2012.
- [10] MONTEIRO R.N. FATORI, L.H. The optimal decay rate for a weak dissipative bresse system. *Applied Mathematics Letters*, 25:600–604, 2011.
- [11] Flávio A. Falcão Nascimento Wenden Charles, J. A. Soriano and J. H. Rodrigues. Decay rates for bresse system with arbitrary nonlinear localized damping. *J. Differential Equations*, 255:2267–2290, 2013.
- [12] J. L. Lions. *Contrôlabilité exacte et stabilisation de systèmes distribués. Vol. 1, 2.* Paris, Masson, 1988.
- [13] V.Komornik; P. Loret. Partial observability of coupled linear system. *Math Hungra*, 86: 49–74, 2000.
- [14] D.L. Russel. A general framework for the study of indirect damping mechanisms in elastic systems,. *J. Math. Appl.*, 173:339–358, 1993.
- [15] F. ALABAU-BOUSSOUIRA. Indirect boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems,. *SIAM J. Control Optim.*, 42:871–906, 2003.
- [16] F. ALABAU-BOUSSOUIRA. A two-level energy method for indirect boundary observability and controlability of weakly coupled hyperbolic systems,. *SIAM J. Control Optim.*, 42:871–906, 2003.
- [17] Prüss J. On the spectrum of c_0 -semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 284:847–857, 1984.
- [18] F. ALABAU-BOUSSOUIRA. Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems. *Appl. Math. and Optimization*, 51:65–105, 2005.
- [19] F. ALABAU-BOUSSOUIRA. Asymptotic behavior for timoshenko beams subject nonlinear feedback control. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 14: 643–669, 2007.

-
- [20] C. Dafermos. Asymptotic stability in viscoelasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal*, 37:297–308, 1970.
- [21] A. Morro M. Fabrizio. *Mathematical problems in linear viscoelasticity*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
- [22] GRAZIA NASO M. RIVERA, J.E.M. Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory. *J. Math. Anal. Appl.*, 326:691–707, 2007.
- [23] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [24] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Masson, 2010.
- [25] TOMILOV Y. BORICHEV, A. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Math. FA*, 347:455–478, 2009.
- [26] V.Barbu. *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*. Editura Academici Române, Bucuresti, 1974.
- [27] H. Brezis. *Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Publishing Co./ American Elsevier Publishing Co., Inc., Amsterdam, London / New York, Masson, 1973.
- [28] A. SOLFYANE. Stabilisation de la poutre de timoshenko. *J. Math. Appl.*, 194:1024–1065, 1992.
- [29] R.T ROCKAFELLAR. *Convex analysis*. Princeton University Press, Masson, 1970.