Universidade Federal do Pará

Universidade Federal do Amazonas

Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática
UFPA-UFAM

Existência e multiplicidade de soluções positivas para problemas elípticos envolvendo um operador do tipo $p\&q$-Laplaciano

por

Amanda Suellen Sena Corrêa Leão

Belém - PA

Dezembro/2013

Existência e multiplicidade de soluções positivas para problemas elípticos envolvendo um operador do tipo $p\&q$-Laplaciano

por

Amanda Suellen Sena Corrêa Leão

sob orientação do

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Tese apresentada ao Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática - UFPA/UFAM, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Belém - PA

Dezembro/2013

Leão, Amanda Suellen Sena Corrêa, 1986-

Existência e multiplicidade de soluções positivas para problemas elípticos envolvendo um operador do tipo $p\&q$-Laplaciano / Amanda Suellen Sena Corrêa Leão. - 2013.

Orientador: Giovany de Jesus Malcher Figueiredo.

Tese (Doutorado)- Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Belém, 2013.

1.Equações diferenciais parciais. 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Operadores não-lineares. 4. Operador Laplaciano. I. Título

CDD 22. ed. 515.353

Universidade Federal do Pará

Universidade Federal do Amazonas

Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática

UFPA-UFAM

Área de Concentração: Análise

Conceito: APROVADA

Data da defesa: 11/12/2013

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa

Prof. Dr. Gaetano Siciliano

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Orientador

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves

Prof^a. Dr^a. Rúbia Gonçalves Nascimento

Tese apresentada ao Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática - UFPA/UFAM, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Dezembro/2013

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

- Ao meu Deus todo poderoso por iluminar meu caminho e por ter me dado forças ao longo da minha trajetória para que eu pudesse concretizar esta tão almejada conquista.

- Aos meus queridos pais, Sunamita e Tadeu, o meu mais profundo agradecimento pelo apoio incondicional que me proporcionaram no decorrer da minha vida acadêmica.

- Aos meus irmãos Washington Sena e Fabrício Oliveira (in memorian) pela convivência e minha avó Inês Sena (in memorian) por suas orações.

- Ao professor Giovany pela orientação, disponibilidade e pelo exemplo de profissional dedicado e competente.

- Ao professor Francisco Júlio pelos ensinamentos que me proporcionou e por suas valiosas sugestões para o aprimoramento deste trabalho.

- Aos professores José Valdo, Gaetano e Rúbia por terem aceito o convite para participar da banca examinadora e pelas contribuições dadas.

- Ao meu amigo professor Doutor "Joãozinho" por todo apoio, companheirismo, pelas horas de estudos e pelo exemplo de humildade.

- Aos meus amigos Cláudia e Gelson pela sólida e verdadeira amizade, bem como pelo incentivo que me prestaram ao longo do Doutorado. Ao grande Rafa pelas risadas e carinho.

- À professora Joelma Morbach por sua generosa ajuda com o latex.

- A todos os professores da Faculdade de Matemática que contribuíram para minha formação em especial à professora Irene Castro pelo apoio e pela amizade.

- Ao meu amado esposo Valdo pelo amor, pelo companheirismo, pelo incentivo, pela paciência e por todos os momentos felizes que passamos juntos.

- A todos que de forma direta ou indireta contribuíram para elaboração deste trabalho.

- Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, usando técnicas de análise funcional não-linear, estudamos resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte classe de problemas do tipo $p\&q$-Laplaciano:

$$-div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u),$$

$u > 0$ em Ω, $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$, $2 \leq p < N$. As hipóteses sobre a função a nos permitem estender esse resultado para uma grande classe de problemas e a função f será descrita ao longo do nosso trabalho.

Palavras-Chaves: Equações Elípticas, $p\&q$-Laplaciano, Problema Singular e Método Variacional.

Abstract

In this paper, using techniques from non linear functional analysis, obtain some results of existence and multiplicity of positive solutions for the following class of problems of $p\&q$-Laplacian type:

$$-div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u),$$

$u > 0$ in Ω, $u = 0$ on $\partial\Omega$, where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ with $N \geq 3$, $2 \leq p < N$. The hypotheses on function a allow us to extend this result to a large class of problems and the function f will be described throughout our work.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho, estudamos questões de existência e multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos

$$(P) \qquad \begin{cases} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) & = & f(u) & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1 e f ao longo dos capítulos subsequentes terá a presença de um termo singular ou será uma função que muda de sinal.

Este problema, do tipo $p\&q$-Laplaciano, envolve uma classe bem mais geral de operadores em que tal generalidade será ilustrada, através de alguns exemplos, pela função a. Problemas envolvendo operadores deste tipo tem recebido atenção especial nos últimos anos, não somente pelo seu interesse matemático mas também porque modela situações em física, biofísica e química. Na verdade, este tipo de problema tem aplicações no estudo de um sistema de reação e difusão:

$$u_t = div[D(u)\nabla u] + c(x, u), \tag{1}$$

onde $D(u) = |\nabla u|^{p-2} + |\nabla u|^{q-2}$. Em tais aplicações, a função u descreve uma concentração, o primeiro termo do lado direito de (1) corresponde a difusão com coeficiente de difusão $D(u)$ e o segundo termo é o de reação e refere-se a fonte e processos de perda. Em aplicações na química e biologia o termo de reação $c(x, u)$ é um polinômio em u com coeficientes variáveis, ver por exemplo [20], [23] e [35].

Seja $\mathcal{W}$ a coleção de todas as funções $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfazendo as seguintes propriedades:

Existem constantes $a_0, a_1, a_2 > 0$, $a_3 \geq 0$, $p < q < N$ tal que

$$(k_1) \qquad a_0 + H(a_3)a_2 t^{(q-p)/p} \leq a(t) \leq a_1 + a_3 t^{(q-p)/p}, \forall\ t \geq 0,$$

onde $H(t) = 1$ se $t > 0$ e $H(t) = 0$ se $t = 0$.
A função

$$(k_2) \qquad t \to a(t^p)t^{p-2} \text{ é crescente.}$$

Daremos abaixo alguns exemplos de função a para ilustrar o grau de generalidade do operador abordado neste trabalho:

Exemplo 0.1 *Se $a \equiv 1$ temos que $a \in \mathcal{W}$ e o nosso operador é o p-Laplaciano. Então o problema (P_1) assume a forma*

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(u) \quad em \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad em \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $a_0 = a_1 = 1, a_3 = 0$ e $a_2 > 0$.

Exemplo 0.2 *Se $a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}}$ temos que $a \in \mathcal{W}$ e obtemos*

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u &= f(u) \quad em \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad em \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

com $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$.

Exemplo 0.3 *Fazendo $a(t) = 1 + \frac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$ temos*

$$\begin{cases} -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}}\right) &= f(u) \quad em \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad em \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

com $a_0 = 1, a_1 = 2, a_3 = 0$ e $a_2 > 0$ sendo $a \in \mathcal{W}$.

Exemplo 0.4 *Considerando agora* $a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}} + \frac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$ *obtemos*

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u - div\left(\frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}}\right) &= f(u) \quad em \quad \Omega, \\ u &= \ 0 \quad em \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $a_0 = 1, a_1 = 2$ *e* $a_3 = a_2 = 1$ *com* $a \in \mathcal{W}$.

No Capítulo 1, designado Solução Positiva para uma Classe de Equação-$p\&q$ Singular Elíptica estudamos o seguinte problema

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \frac{1}{u^\alpha} + u^\beta \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $N \geq 3$, $2 \leq p < N$, $\alpha, \beta \in (0, p-1)$ e $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1 tal que $a \in \mathcal{W}$.

O estudo de problemas singulares tem sido de relevante importância nos últimos anos como pode ser visto em [1], [2] [3], [9], [14], [19], [31], [27], [33], [36], [37] e suas referências. Isto ocorre devido seu grande significado em aplicações tais como: mecânica dos fluídos, fluídos não-Newtonianos e formação de padrões biológicos. Neste capítulo, trabalhamos com a presença de um termo singular e, portanto, temos uma dificuldade para contornar tal singularidade e utilizamos para isto a desigualdade de Hardy-Sobolev.

Enunciaremos agora o principal resultado deste capítulo:

Teorema 0.1 *Suponhamos que a função a verifique as condições* $(a_1) - (a_2)$. *Então o problema* (P_1) *possui uma solução positiva.*

O problema (P_1) foi motivado pelo estudo feito em Alves-Corrêa [1] no qual os autores estudaram um sistema (p, q) com termos singulares. Em Figueiredo [18], o autor trabalhou com um problema envolvendo $-div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ considerando crescimento crítico na não linearidade, domínio limitado e usando método variacional. Este autor também em [17], estudou um problema com o mesmo operador considerando agora crescimento crítico e trabalhando em $\mathbb{R}^N$. Neste trabalho, bem como em suas referências, os autores estudaram este tipo de problema usando técnicas variacionais. Porém, no nosso caso o problema (P_1) foi abordado usando método não variacional conforme as idéias contidas em [1] via o resultado de Rabinowitz que será enunciado no Capítulo 1. Acreditamos que esta técnica não havia sido utilizada antes para operadores do tipo $p\&q$-Laplaciano pois requer um princípio de comparação para este operador o qual será demonstrado no Lema 1.2.

Na Seção 1.1 fizemos o estudo de um problema auxiliar necessário para mostrarmos a existência de solução positiva para o problema (P_1). Posteriormente, na Seção 1.2, usando a solução obtida para o problema auxiliar demonstramos o Teorema 0.1.

O resultado que obtivemos no Capítulo 1 deu origem a um artigo que será publicado no Nonlinear Analysis: Real Worlds and Applications [8].

No Capítulo 2, denominado Existência de Solução Positiva para um Sistema Singular Envolvendo Operadores Quasilineares, com intuito de completarmos o estudo feito no Capítulo 1, mostramos a existência e positividade de solução para a seguinte classe de sistema singular

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -div\ (a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) = h_1(x)v^{-\gamma_1} + k_1(x)v^{\alpha_1} \text{ em } \Omega, \\ -div\ (a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v) = h_2(x)u^{-\gamma_2} + k_2(x)u^{\alpha_2} \text{ em } \Omega, \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave com $N \geq 3$, $2 \leq p_i < N$, $\alpha_i, \gamma_i \in (0, p_i - 1)$ e h_i, k_i são funções contínuas definidas em $\overline{\Omega}$ para $i = 1, 2$.

As hipóteses sobre as funções $a_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe C^1 são dadas por

(A_1) Existem constantes reais $\xi_0, \xi_1, \xi_2, > 0$, $\xi_3 \geq 0$ e $p_i < q_i < N$ para $i = 1, 2$ tal que

$$\xi_0 + H(\xi_3)\xi_1 t^{\frac{q_i - p_i}{p_i}} \leq a_i(t) \leq \xi_2 + \xi_3 t^{\frac{q_i - p_i}{p_i}},\ \forall\ t \geq 0,$$

onde $H : [0, +\infty) \to \{0, 1\}$ e a função dada por

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t > 0 \\ 0 & \text{se} \quad t = 0. \end{cases}$$

(A_2) A aplicação $g_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, dada por $g_i(t) = a_i(t^{p_i})t^{p_i-2}$ é crescente para $i = 1, 2$.

(A_3) As aplicações $h_i, k_i : \overline{\Omega} \to (0, +\infty)$ são funções contínuas para $i = 1, 2$.

O resultado principal deste capítulo é:

Teorema 0.2 *Suponhamos que sejam válidas as condições* $(A_1) - (A_3)$, $2 \leq p_i < N$ *e* $\alpha_i, \gamma_i \in (0, p_i - 1)$ *para* $i = 1, 2$. *Então o problema* (P_2) *possui uma solução positiva.*

O Teorema 0.2 está relacionado com os resultados de [1], [2] e [37]. Em [1] os autores estudaram o sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = v^{-\gamma_1} + v^{\alpha_1} \text{ em } \Omega, \\ -\Delta_q v = u^{-\gamma_2} + u^{\alpha_2} \text{ em } \Omega, \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e mostraram a existência de solução usando um teorema devido a Rabinowitz [29] e a desigualdade de Hardy-Sobolev.

Em [2] os autores estudaram o sistema Hamiltoniano singular

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{H(x,u,v)} + T(x, u, v) \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v = \frac{1}{S(x,u,v)} + K(x, u, v) \text{ em } \Omega, \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e mostraram a existência de solução utilizando o método de Galerkin.

Em [37] foi estudado o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{-p}v^{-q} \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v = u^{-r}v^{-s} \text{ em } \Omega, \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

O autor mostrou resultado de existência, não existência e unicidade para diferentes valores de p, q, r, s usando métodos de sub-supersolução.

Completamos o estudo feito em [1] pois trabalhamos com uma classe de operadores bem mais gerais que os considerados neste artigo.

Na Seção 2.1 estudamos a existência de solução para um problema auxiliar via Teorema de Rabinowitz [29] e na Seção 2.2 demonstramos o Teorema 0.2 usando para isto a desigualdade de Hardy-Sobolev.

No Capítulo 3, intitulado Múltiplas Soluções Positivas Ordenadas para um Problema Elíptico Envolvendo o $p\&q$-Laplaciano estudamos questões de existência e multiplicidade de soluções para o problema

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= \lambda f(u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, λ é um parâmetro real positivo, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1 e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que muda de sinal. As hipóteses sobre as funções a e f são:

(f_1) $f(0) \geq 0$ e existem $0 < b_1 < c_1 < b_2 < \cdots < c_{m-1} < b_m$, zeros de f, tal que

$$\begin{cases} f \leq 0 \quad em \quad (b_k, c_k) \\ f \geq 0 \quad em \quad (c_k, b_{k+1}); \end{cases}$$

(f_2) $\displaystyle\int_{b_k}^{b_{k+1}} f(s)ds > 0,\ \forall\ k \in \{1, \ldots, m-1\}$.

$(\mathcal{K}_1)$ Existem constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_3 \geq 0$ e $1 < p < q < \infty$ tal que

$$\alpha_0 + H(\alpha_3)\alpha_1 t^{\frac{q-p}{p}} \leq a(t) \leq \alpha_2 + \alpha_3 t^{\frac{q-p}{p}},\ \forall\ t \geq 0,$$

onde $H : [0, +\infty) \to \{0, 1\}$ é a função dada por

$$H(t) = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad t > 0 \\ 0 \quad \text{se} \quad t = 0. \end{cases}$$

$(\mathcal{K}_2)$ Se $p \geq 2$, a aplicação $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $g(t) = a(t^p)t^{p-2}$ é não-decrescente e se

$1 < p < 2$, a aplicação $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é não-decrescente.

Considerando

$$\gamma = (1 - H(\alpha_3))p + H(\alpha_3)q,$$

vamos denotar por X o espaço de Sobolev $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$.

Os principais resultados deste capítulo são enunciados como segue:

Teorema 0.3 *Suponhamos que as condições $(f_1) - (f_2)$ e $(\mathcal{K}_1) - (\mathcal{K}_2)$ sejam satisfeitas. Então, existe $\lambda^* > 0$, tal que para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ o problema (P_λ) possui ao menos $(m-1)$ soluções fracas u_i com*

$$u_i \in X \cap L^\infty(\Omega) \;\; e \;\; b_i < \|u_i\|_\infty \leq b_{i+1}, \; \forall\, i \in \{1, \ldots, m-1\}.$$

Teorema 0.4 *Suponhamos que $f(0) > 0$. Se (P_λ) possui uma solução fraca não negativa $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\|u\|_\infty \in (b_1, b_2]$, então*

$$\int_{b_1}^{b_2} f(s)ds > 0.$$

Relembrando que f é uma função não-linear que muda de sinal em $[0, +\infty)$ a condição (f_2) nos diz que a área entre o gráfico de f e o eixo x, correspondente ao intervalo $[b_i, c_i]$, é estritamente menor que o correspondente ao intervalo $[c_i, b_{i+1}]$. Este tipo de condição de área foi estudada por Brown-Budin [5] (1979), onde eles provaram um resultado de multiplicidade para o problema

$$\begin{cases} Lu = \lambda f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde L é o operador

$$(Lu)(x) = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u(x)) + c(x)u(x).$$

Posteriormente em 1981, Hess [21] estudou este problema com $L = -\Delta$ usando métodos variacionais e teoria do grau. Em 1984, de Figueiredo [12] considerou a questão de unicidade de solução positiva para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda \, sen \, u \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

em domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Em 1987, de Figueiredo [13] estudou o problema (P_λ) considerando o operador laplaciano e usando apenas métodos variacionais. Ainda no que diz respeito ao problema (P_λ) considerando o operador laplaciano os autores Clément-Sweers [6], Dancer-Schmiit [10], Liu-Wang-Shi [25], Sweers [32], Wang-Kazarinoff [34] e Dancer-Yan [11] consideraram questões de existência e multiplicidade de soluções positivas e também a necessidade da condição (f_2).

O Capítulo 3 foi inspirado por Loc-Schmitt [26] onde os autores mostraram resultado de existência e multiplicidade de solução para o problema (P_λ) utilizando o operador p-Laplaciano. Usando as mesmas técnicas utilizadas em [26] porém, agora para um operador bem mais geral, como nos capítulos anteriores, provamos um resultado de existência e multiplicidade para o problema (P_λ).

As seções deste capítulo estão organizadas como segue: Na Seção 3.1 estabelecemos alguns resultados preliminares. Na Seção 3.2 provamos nosso resultado de existência e multiplicidade de solução para o problema (P_λ) usando o Princípio Variacional de Ekeland e o Lema de Brezis-Lieb. Finalmente, na Seção 3.3 provamos que a condição (f_2) é necessária para mostrarmos a existência de solução fraca para o problema (P_λ).

Os resultados centrais do Capítulo 3 completam os estudos feitos em [26] no sentido que estamos considerando uma classe de problemas quasilineares que não foi considerada pelos autores em questão.

O estudo desenvolvido ao longo do Capítulo 3 originou um artigo que será publicado no Journal of Convex Analysis [7].

Para finalizar, no Apêndice A, enunciamos alguns resultados importantes utilizados ao longo deste trabalho e indicamos as referências para as consultas das demonstrações.

Objetivando uma melhor organização e compreensão para o leitor enunciaremos novamente, em cada capítulo, os principais resultados, bem como as hipóteses sobre as funções a e f.

Notações

$\square$: fim de uma demonstração,

$\rightarrow$: convergência forte,

$\rightharpoonup$: convergência fraca,

$|.|_\alpha = |.|_{L^\alpha(\Omega)}$,

$|A|$ é a medida de Lebesgue de um conjunto A,

$\displaystyle\int_\Omega f$: denota $\displaystyle\int_\Omega f(x)\, dx$,

$\langle ., . \rangle$: par de dualidade.

Capítulo

1

Solução Positiva para uma Classe de Equação-p&q Singular Elíptica

Neste capítulo, estudamos um resultado de existência e positividade de solução para a seguinte classe de problemas singulares:

$$(P) \qquad \begin{cases} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \frac{1}{u^\alpha} + u^\beta \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 3$, $2 \leq p < N$ e $\alpha, \beta \in (0, p-1)$. As hipóteses sobre a função a serão listadas abaixo.

Para estabelecer a existência de solução positiva para o problema (P) usamos o seguinte problema auxiliar:

$$(P_\epsilon) \qquad \begin{cases} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \frac{1}{|u|^{\alpha+\epsilon}} + |u|^\beta \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $0 < \epsilon < 1$ para o qual mostramos a existência de solução utilizando um resultado de Rabinowitz descrito na Proposição 1.1.

As hipóteses sobre a função $a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^1 são:

Existem constantes $a_0, a_1, a_2 > 0$, $a_3 \geq 0$, $p < q < N$ tal que

$$(k_1) \qquad a_0 + H(a_3)a_2 t^{(q-p)/p} \leq a(t) \leq a_1 + a_3 t^{(q-p)/p}, \forall\, t \geq 0,$$

onde $H(t) = 1$ se $t > 0$ e $H(t) = 0$ se $t = 0$.
A função

$$(k_2) \qquad t \to a(t^p)t^{p-2} \text{ é crescente.}$$

O principal resultado deste capítulo segue descrito abaixo:

Teorema 1.1 *Suponhamos que a função a satisfaça as condições* $(a_1) - (a_2)$. *Então o problema* (P) *possui uma solução positiva.*

No que segue, consideramos $\gamma = (1 - H(a_3))p + H(a_3)q$ e definimos o espaço de Sobolev $X = W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\| = \|u\|_{1,p} + H(a_3)\|u\|_{1,q},$$

onde $\|u\|_{1,m} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^m dx \right)^{\frac{1}{m}}$, para $m \geq 1$.

Vamos agora considerar o operador $T : X \longrightarrow X^*$ que a cada $u \in X$ associa um elemento de X^* (dual topológico de X) dado por

$$\langle Tu, \phi \rangle = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi.$$

Note que Tu está bem definido, pois usando a hipótese (a_1), temos, para cada $\phi \in X$,

$$\begin{aligned}
\langle Tu, \phi \rangle &= \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi \\
&\leq \left| \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi \right| \\
&\leq \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-1}|\nabla \phi| \\
&\leq a_1 \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla \phi| + a_3 \int_\Omega |\nabla u|^{q-1}|\nabla \phi|.
\end{aligned}$$

Se $a_3 = 0$ então $\gamma = p$ e $X = W_0^{1,p}(\Omega)$. Deste modo, usando a desigualdade de Hölder com os expoentes $\dfrac{p}{p-1}$ e p obtemos

$$\begin{aligned}\langle Tu, \phi\rangle &\leq a_1 \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla \phi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= a_1 |\nabla u|_p^{p-1} |\nabla \phi|_p < \infty,\end{aligned}$$

pois $|\nabla u|, |\nabla \phi| \in L^p(\Omega)$.

Se $a_3 > 0$ então $\gamma = q$ e $X = W_0^{1,q}(\Omega)$. Usando a desigualdade de Hölder com os expoentes $\dfrac{q}{q-1}$ e q temos

$$\begin{aligned}\langle Tu, \phi\rangle &\leq a_1 \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla \phi|^p\right)^{\frac{1}{p}} + a_3 \left(\int_\Omega |\nabla u|^q\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_\Omega |\nabla \phi|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= a_1 |\nabla u|_p^{p-1} |\nabla \phi|_p + a_3 |\nabla u|_q^{q-1} |\nabla \phi|_q < \infty,\end{aligned}$$

pois $|\nabla u|, |\nabla \phi| \in L^q(\Omega)$.

Mostraremos agora que se $u \in X$ então $Tu \in X^*$. De fato, sejam $\phi_1, \phi_2 \in X$ e $c \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned}\langle Tu, c\phi_1 + \phi_2\rangle &= \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(c\phi_1 + \phi_2) \\ &= c\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi_1 + \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi_2 \\ &= c\,\langle Tu, \phi_1\rangle + \langle Tu, \phi_2\rangle\,.\end{aligned}$$

Agora, observe que pela hipótese (k_1) temos

$$\begin{aligned}|\,\langle Tu, \phi\rangle\,| &\leq \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-1}|\nabla \phi| \\ &\leq a_1 \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla \phi| + a_3 \int_\Omega |\nabla u|^{q-1}|\nabla \phi|.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder com os expoentes $\dfrac{p}{p-1}$ e p, $\dfrac{q}{q-1}$ e q obtemos

$$\begin{aligned} |\langle Tu, \phi\rangle| &\leq a_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega |\nabla \phi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ a_3\left(\int_\Omega |\nabla u|^q\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_\Omega |\nabla \phi|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Tomando $C = max\left\{a_1\|u\|_{1,p}^{p-1}, a_3\|u\|_{1,q}^{q-1}\right\}$ segue-se

$$|\langle Tu, \phi\rangle| \leq C\|\phi\|, \forall\ \phi \in X.$$

No próximo Lema demonstraremos algumas propriedades satisfeitas pelo operador T e que serão utilizadas a fim de aplicarmos o Teorema de Minty-Browder (ver Teorema A.6 no Apêndice).

Lema 1.1 *O operador $T : X \longrightarrow X^*$ é*

(i) contínuo;

(ii) monótono, isto é, $\langle Tu - Tv, u - v\rangle > 0$ para todo $u, v \in X$ com $u \neq v$, onde $\langle,\rangle$ denota a dualidade X^*, X;

(iii) coercivo, isto é,

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} = +\infty.$$

Demonstração. (i) Sejam $(u_n) \subset X$ e $u \in X$ tal que $u_n \to u$ em X. Então,

$$\begin{aligned} |\langle Tu_n, v\rangle - \langle Tu, v\rangle| &= \left|\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v - \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\right| \\ &= \left|\int_\Omega \left(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\nabla v\right| \\ &\leq \int_\Omega \left|a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right| |\nabla v|. \end{aligned}$$

Note que usando a condição (k_1) e considerando

$$h_n := \left|a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|$$

temos

$$\int_\Omega |h_n|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \leq \int_\Omega \left| a_1(|\nabla u_n|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}) + a_3(|\nabla u_n|^{q-1} + |\nabla u|^{q-1}) \right|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Analisando os casos em que $a_3 = 0$ e $a_3 > 0$ obtemos

$$\int_\Omega |h_n|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} < +\infty.$$

Desse modo, $h_n \in L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)$. Como $|\nabla v| \in L^\gamma(\Omega)$ e $\dfrac{\gamma-1}{\gamma} + \dfrac{1}{\gamma} = 1$ segue da desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega h_n |\nabla v| \leq |h_n|_{\frac{\gamma}{\gamma-1}} |\nabla v|_\gamma.$$

Das imersões de Sobolev temos

$$|\langle Tu_n, v\rangle - \langle Tu, v\rangle| \leq C|h_n|_{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \|v\|.$$

Tomando $\|v\| \leq 1$ obtemos

$$\sup_{\|v\|\leq 1} |\langle Tu_n - Tu, v\rangle| \leq C|h_n|_{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Assim,

$$\|Tu_n - Tu\|_*^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \leq C^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} |h_n|_{\frac{\gamma}{\gamma-1}}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Resta-nos então provar que $h_n \to 0$ em $L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)$. De fato, desde que $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ em $(L^\gamma(\Omega))^N$ então, a menos de subsequência, $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ q.t.p em Ω e existe $g \in L^\gamma(\Omega)$ tal que $|\nabla u_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω. Sendo a função a contínua segue-se

$$h_n(x) \to 0 \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Usando a condição (k_1) temos

$$\begin{aligned} h_n &\leq a_1(|\nabla u_n|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}) + a_3(|\nabla u_n|^{q-1} + |\nabla u|^{q-1}) \\ &\leq a_1(g(x)^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}) + a_3(g(x)^{q-1} + |\nabla u|^{q-1}). \end{aligned}$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
& \left|a_1(g(x)^{p-1}+|\nabla u|^{p-1})+a_3(g(x)^{q-1}+|\nabla u|^{q-1})\right|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
\leq \;\; & a_1 2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left((g(x)^{p-1})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+|\nabla u|^{\frac{\gamma(p-1)}{\gamma-1}}\right)+a_3 2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left((g(x)^{q-1})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+|\nabla u|^{\frac{\gamma(q-1)}{\gamma-1}}\right).
\end{aligned}
$$

Se $a_3=0$ então $\gamma=p$ e neste caso temos $a_1 2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(g(x)^p+|\nabla u|^p\right)\in L^1(\Omega)$. Se $a_3>0$ então $\gamma=q$ e assim temos

$$
a_1 2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left((g(x)^{p-1})^{\frac{q}{q-1}}+|\nabla u|^{\frac{q(p-1)}{q-1}}\right)+a_3 2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left((g(x)^q)+|\nabla u|^q\right)\in L^1(\Omega).
$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$
\lim_n \int_\Omega |h_n(x)|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=\int_\Omega \lim_n |h_n(x)|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=0
$$

ou seja,

$$
|h_n|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}_{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\to 0.
$$

Logo, $\|Tu_n-Tu\|_*\to 0$, isto é, $Tu_n\to Tu$ em X^* mostrando assim a continuidade de T.

(ii) Para mostrarmos que T é monótono é suficiente demonstrar a desigualdade abaixo

$$
C|x-y|^p\leq \left\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x-a(|y|^p)|y|^{p-2}y,x-y\right\rangle \text{ para todo } x,y\in\mathbb{R}^N. \tag{1.1}
$$

De fato, note que

$$
\begin{aligned}
& \left\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x-a(|y|^p)|y|^{p-2}y,x-y\right\rangle \qquad (1.2)\\
= \;\; & \sum_{j=1}^N (a(|x|^p)|x|^{p-2}x_j-a(|y|^p)|y|^{p-2}y_j)(x_j-y_j),
\end{aligned}
$$

e para todo $z,\xi\in\mathbb{R}^N$ utilizando a regra do produto, a regra da cadeia e considerando $i=j$

temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j \\
= & \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial z_i}(a((z_1^2+...+z_n^2)^{\frac{p}{2}})(z_1^2+...+z_n^2)^{\frac{p-2}{2}})z_i + a(|z|^p)|z|^{p-2} \right) \\
= & (p-2)|z|^{p-4}\sum_{i=1}^{N} a(|z|^p)z_iz_i\xi_i\xi_i \\
+ & \sum_{i=1}^{N} a(|z|^p)|z|^{p-2}\xi_i\xi_i + p\sum_{i=1}^{N} a'(|z|^p)|z|^{2p-4}z_iz_i\xi_i\xi_i.
\end{aligned}$$

Quando $i \neq j$ temos

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j = (p-2)|z|^{p-4}\sum_{i,j=1}^{N} a(|z|^p)z_iz_j\xi_i\xi_j + p\sum_{i,j=1}^{N} a'(|z|^p)|z|^{2p-4}z_iz_j\xi_i\xi_j.$$

Dessa maneira, podemos escrever

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j = (p-2)|z|^{p-4}\sum_{i,j=1}^{N} a(|z|^p)z_iz_j\xi_i\xi_j \\
+ & \sum_{i,j=1}^{N} a(|z|^p)|z|^{p-2}\delta_{i,j}\xi_i\xi_j + p\sum_{i,j=1}^{N} a'(|z|^p)|z|^{2p-4}z_iz_j\xi_i\xi_j.
\end{aligned}$$

Além disso, observemos que

$$\sum_{i,j=1}^{N}(z_iz_j\xi_i\xi_j) = \sum_{i=1}^{N}(z_i\xi_i)\sum_{j=1}^{N}(z_j\xi_j) = (\sum_{j=1}^{N} z_j\xi_j)^2 \geq 0,$$

e assim

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j &= (\sum_{j=1}^{N} z_j\xi_j)^2|z|^{p-4}\Big[(p-2)a(|z|^p) + pa'(|z|^p)|z|^p\Big] \\
&+ a(|z|^p)|z|^{p-2}|\xi|^2.
\end{aligned}$$

Pela hipótese (k_2) temos $(a(t^p)t^{p-2})' \geq 0$ o que implica $(p-2)a(|z|^p) + pa'(|z|^p)|z|^p \geq 0$.

Logo,

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j \geq a(|z|^p)|z|^{p-2}|\xi|^2. \tag{1.3}$$

Além disso, se $|y| \geq |x|$ temos $\frac{1}{2}|x-y| \leq |y|$ e para $t \in [0, \frac{1}{4}]$ vale

$$|y + t(x-y)| \geq |y| - t|x-y| \geq \frac{1}{4}|x-y|.$$

Fazendo $z = x - y$ e $\xi = x - y$, temos

$$\sum_{j=1}^{N}(a(|x|^p)|x|^{p-2}x_j - a(|y|^p)|y|^{p-2}y_j)(x_j - y_j) = \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j \, dt. \tag{1.4}$$

Usando (1.2), (1.3) e (1.4) obtemos

$$\left\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y \right\rangle \geq a(|y+t(x-y)|^p)|y+t(x-y))|^{p-2}|x-y|^2.$$

Segue da hipótese (k_1) que

$$\left\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y \right\rangle \geq \frac{a_0}{4}|x-y|^{p-2}|x-y|^2 = C|x-y|^p,$$

onde $C = \left(\frac{a_0}{4}\right)^{p-2} > 0$, mostrando assim a desigualdade desejada.

Agora, sejam $u, v \in X$ tais que $u \neq v$ e façamos $x = \nabla u$ e $y = \nabla v$ na desigualdade provada acima. Dessa maneira temos,

$$\begin{aligned} & \left\langle a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u - a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla u - \nabla v \right\rangle \\ = \; & a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \\ + \; & a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^p - a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla u \nabla v \\ \geq \; & C|\nabla u - \nabla v|^p. \end{aligned}$$

Integrando ambos os membros da desigualdade acima obtemos

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p - \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_\Omega a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^p - \int_\Omega a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla u \nabla v \\
\geq \;& C\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p \\
> \;& 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\langle Tu - Tv, u - v\rangle \geq 0$.

(iii) Observe que usando a hipótese (k_1) temos

$$
\begin{aligned}
\langle Tu, u\rangle &= \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p \\
&\geq a_0\int_\Omega |\nabla u|^p + H(a_3)a_2\int_\Omega |\nabla u|^q \\
&= a_0\|u\|_{1,p}^p + H(a_3)a_2\|u\|_{1,q}^q.
\end{aligned}
$$

Se $a_3 = 0$ temos $\|u\| = \|u\|_{1,p}$ e, portanto,

$$\frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} \geq a_0\|u\|_{1,p}^{p-1} = a_0\|u\|^{p-1}.$$

Logo, $\displaystyle\lim_{\|u\|\to+\infty}\frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} = +\infty$.

Analisando agora o caso em que $a_3 > 0$ temos $\|u\| = \|u\|_{1,p} + \|u\|_{1,q}$ e, assim,

$$\langle Tu, u\rangle \geq C(\|u\|_{1,p}^p + \|u\|_{1,q}^q),$$

onde $C = min\,\{a_0, a_2\} > 0$.

Fazendo $\|u\| \to +\infty$ devemos considerar os casos:

(a) $\|u\|_{1,p} \to +\infty$ e $\|u\|_{1,q} \to +\infty$;

(b) $\|u\|_{1,p} \to +\infty$ e $\|u\|_{1,q}$ é limitada;

(c) $\|u\|_{1,p}$ é limitada e $\|u\|_{1,q} \to +\infty$

No caso (a) desde que $\|u\|_{1,q} \to +\infty$ então podemos considerar $\|u\|_{1,q}^{q-p} \geq 1$ e assim

$\|u\|_{1,q}^q \geq \|u\|_{1,q}^p$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
\langle Tu, u\rangle &\geq C(\|u\|_{1,p}^p + \|u\|_{1,q}^p) \\
&\geq C_1(\|u\|_{1,p} + \|u\|_{1,q})^p,
\end{aligned}$$

onde $C_1 = 2^p C > 0$. Então,

$$\langle Tu, u\rangle \geq C_1 \|u\|^p$$

e com isto temos

$$\frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} \geq C_1 \|u\|^{p-1}.$$

Portanto,

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} = +\infty,$$

mostrando que T é coercivo.

Note que o caso (b) não pode ocorrer visto que sendo $p < q$ e Ω um domínio limitado então $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$. Assim,

$$\|u\|_{1,p} \leq C\|u\|_{1,q} \leq K,$$

pois $\|u\|_{1,q}$ é limitada. Como $\|u\|_{1,p} \to +\infty$ então o item (b) não pode ocorrer. Para o caso (c) procedemos de modo análogo ao (a). Com isto, garantimos a coercividade do operador T. $\square$

A seguir demonstraremos um princípio de comparação fraco para o operador $-div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$.

Lema 1.2 *Se Ω é um domínio limitado e se $u, v \in X$ satisfazem*

$$\begin{cases} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \leq -div\ (a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla v)\ \ em\ \ \Omega, \\ u \leq v\ \ em\ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \leq v$ q.t.p em Ω.

Demonstração. Denotemos por $w_1 = -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, por $w_2 =$

$-div\ (a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla v)$ e considere $(u-v)^+ = max\,\{u-v,0\} \geq 0$.

Desde que $u \leq v$ em $\partial\Omega$ então $(u-v)^+ = 0$ em $\partial\Omega$ e, portanto, $(u-v)^+ \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$. Sendo

$$\nabla(u-v)^+ = \begin{cases} \nabla(u-v) & \text{se} \quad u > v, \\ 0 & \text{se} \quad u \leq v, \end{cases}$$

e como, por hipótese, $w_1 - w_2 \leq 0$ em Ω então

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_\Omega (w_1 - w_2)(u-v)^+ \\ &= \int_\Omega \big(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u - a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\big)\,\nabla(u-v)^+ \\ &= \int_{\{u>v\}} \big(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u - a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\big)\,\nabla(u-v). \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade

$$\big\langle a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u - a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla u - \nabla v\big\rangle \geq C|\nabla u - \nabla v|^p,$$

obtemos

$$0 \leq \int_{\{u>v\}} \big(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u - a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\big)\,\nabla(u-v) \leq 0.$$

Portanto,

$$\int_{\{u>v\}} \big(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u - a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\big)\,\nabla(u-v) = 0.$$

Façamos $\Omega_0 = \{x \in \Omega : u(x) > v(x)\}$. Temos duas possibilidades:

(i) $\Omega_0 = \emptyset$ ou

(ii) $\nabla u = \nabla v$ em Ω_0.

Se ocorresse (ii) teríamos $v = u + c$, onde c é uma constante. Como em $\partial\Omega_0$ temos $u = v$ por continuidade segue que $c = 0$ e, portanto, $v = u$ em Ω_0 o que contradiz $u > v$. Segue-se então que $\Omega_0 = \emptyset$. $\square$

No Lema 1.1 mostramos que T é um operador monótono, contínuo e coercivo. Segue então, do Teorema de Minty-Browder (ver Teorema A.6 no Apêndice) que dado $f \in X^*$ existe um único $u \in X$ satisfazendo

$$\begin{cases} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este fato será necessário para mostrarmos a existência de solução para o problema auxiliar.

1.1 Um Problema Auxiliar

Para cada $\epsilon > 0$ fixado, considere o seguinte problema

$$(P_\epsilon) \qquad \begin{cases} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \frac{1}{|u|^\alpha+\epsilon} + |u|^\beta \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Mostraremos a existência de solução para este problema auxiliar utilizando a seguinte proposição encontrada em [29]:

Proposição 1.1 *Seja E um espaço de Banach e $S : \mathbb{R}^+ \times E \to E$ um operador compacto e contínuo tal que $S(0, u) = 0$ para todo $u \in E$. Então a equação*

$$u = S(\lambda, u)$$

possui uma componente não-limitada $C \subset \mathbb{R} \times E$ de soluções com $(0, 0) \in C$.

Teorema 1.2 *Para cada $\epsilon > 0$ fixado o problema (P_ϵ) possui uma solução positiva.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ fixado e para cada $v \in X$ e $\lambda \geq 0$ consideremos o problema

$$(P_{v,\epsilon}) \qquad \begin{cases} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda\left\{\dfrac{1}{|v|^\alpha + \epsilon} + |v|^\beta\right\} \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue do Teorema de Minty-Browder (ver Teorema A.6 no Apêndice) que o problema $(P_{v,\epsilon})$ possui uma única solução $u \in X$. Assim, fica bem definido o operador

$$
\begin{aligned}
S : \mathbb{R}^+ \times X &\rightarrow X \\
(\lambda, v) &\mapsto u = S(\lambda, v).
\end{aligned}
$$

Afirmação 1: O operador S é compacto.

De fato, sejam $((\lambda_n, v_n))$ uma sequência limitada em $\mathbb{R}^+ \times X$ e $u_n = S(\lambda_n, v_n)$. Pela definição de S a sequência (u_n) satisfaz

$$
\begin{cases}
-div\ (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n) = \lambda_n \left\{ \dfrac{1}{|v_n|^\alpha + \epsilon} + |v_n|^\beta \right\} \text{ em } \ \Omega, \\
u_n > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\
u_n = 0 \text{ em } \ \partial\Omega.
\end{cases}
$$

Assim,

$$
\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\phi = \lambda_n \int_\Omega \left\{ \frac{\phi}{|v_n|^\alpha + \epsilon} + |v_n|^\beta \phi \right\}, \ \forall\ \phi \in X.
$$

Em particular fazendo $\phi = u_n$ na equação acima temos

$$
\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p = \lambda_n \int_\Omega \left\{ \frac{u_n}{|v_n|^\alpha + \epsilon} + |v_n|^\beta u_n \right\}. \tag{1.5}
$$

Visto que $\beta \in (0, p-1)$ segue da desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{p}{\beta}$ e $\frac{p}{p-\beta}$ e das imersões de Sobolev que

$$
\begin{aligned}
\lambda_n \int_\Omega \left\{ \frac{u_n}{|v_n|^\alpha + \epsilon} + |v_n|^\beta u_n \right\} &\leq \lambda_n \int_\Omega \frac{u_n}{\epsilon}\ dx + \int_\Omega |v_n|^\beta u_n \\
&\leq \lambda_n \left\{ C_\epsilon \|u_n\| + \|v_n\|^\beta \|u_n\| \right\}.
\end{aligned}
$$

Usando a condição (k_1) em (1.5) e o fato de (λ_n) e $(\|v_n\|)$ serem limitadas em $\mathbb{R}^+$ temos

$$
\begin{aligned}
a_0\|u_n\|_{1,p}^p + H(a_3)a_2\|u_n\|_{1,q}^q &\leq \lambda_n \left\{ C_\epsilon \|u_n\| + \|v_n\|^\beta \|u_n\| \right\} \\
&\leq C\|u_n\|.
\end{aligned}
$$

Note que se $a_3 = 0$ temos $\|u_n\|_{1,p} = \|u_n\|$ e , portanto,

$$a_0\|u_n\|^p \leq C\|u_n\|. \tag{1.6}$$

Desta forma, (u_n) é limitada pois, do contrário, existiria uma subsequência, que continuaremos denotando por (u_n), tal que $\|u_n\| \to +\infty$. Logo, de (1.6) temos

$$a_0 \leq C \cdot \frac{1}{\|u_n\|^{p-1}}.$$

Passando ao limite quando $n \to +\infty$ teríamos $a_0 \leq 0$ o que contradiz o fato de $a_0 > 0$. Agora, suponhamos $a_3 > 0$ e que a menos de subsequência $\|u_n\| \to +\infty$. Devemos considerar os casos:

(a) $\|u_n\|_{1,p} \to +\infty$ e $\|u_n\|_{1,q} \to +\infty$;

(b) $\|u_n\|_{1,q}$ é limitada e $\|u_n\|_{1,p} \to +\infty$;

(c) $\|u\|_{1,p}$ é limitada e $\|u\|_{1,q} \to +\infty$.

No caso (a) desde que $\|u_n\|_{1,q} \to +\infty$ então para n suficientemente grande temos $\|u_n\|_{1,q}^{q-p} \geq 1$ e, portanto, $\|u_n\|_{1,q}^{q} \geq \|u_n\|_{1,q}^{p}$. Desta maneira, podemos escrever

$$\begin{aligned} C\|u_n\| &\geq C_1(\|u_n\|_{1,p}^p + \|u_n\|_{1,q}^q) \\ &\geq C_1(\|u_n\|_{1,p}^p + \|u_n\|_{1,q}^p) \\ &\geq C_2(\|u_n\|_{1,p} + \|u_n\|_{1,q})^p \\ &= C_2\|u_n\|^p \end{aligned}$$

onde $C_1 = min\,\{a_0, a_2\} > 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} C_2\|u_n\|^p &\leq C\|u_n\| \\ C_2 &\leq C \cdot \frac{1}{\|u_n\|^{p-1}}. \end{aligned}$$

Fazendo $n \to +\infty$ temos $C_2 \leq 0$ o que é absurdo.

No caso (b) temos

$$C(\|u_n\|_{1,p} + \|u_n\|_{1,q}) \geq a_0\|u_n\|_{1,p}^p + a_2\|u_n\|_{1,q}^q \geq a_0\|u_n\|_{1,p}^p.$$

Então,

$$\begin{aligned} C\left(\frac{\|u_n\|_{1,p}}{\|u_n\|_{1,p}^p} + \frac{\|u_n\|_{1,q}}{\|u_n\|_{1,p}^p}\right) &\geq a_0 \\ C\left(\frac{1}{\|u_n\|^{p-1}} + \frac{\|u_n\|_{1,q}}{\|u_n\|_{1,p}^p}\right) &\geq a_0. \end{aligned}$$

Desde que $\|u_n\|_{1,q}$ é limitada então passando ao limite quando $n \to +\infty$ temos $a_0 \leq 0$ o que contradiz o fato de $a_0 > 0$. De modo análogo ao caso (b) mostra-se o caso (c). Portanto, (u_n) é limitada em X.

Sendo X um espaço de Banach reflexivo temos, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ para algum } u \in X,$$

$$u_n \to u \text{ em } L^s(\Omega), \text{ para todo } 1 \leq s < \gamma^*,$$

$$v_n \rightharpoonup v \text{ para algum } v \in X,$$

$$v_n \to v \text{ em } L^s(\Omega), \text{ para todo } 1 \leq s < \gamma^*,$$

e

$$\lambda_n \to \lambda \geq 0.$$

Observe que utilizando a desigualdade (1.1) concluímos

$$\begin{aligned} C\|u_n - u\|_{1,p}^p &\leq \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p \\ &- \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u + o_n(1) \\ &= \lambda_n \int_\Omega \frac{u_n}{|v_n|^\alpha + \epsilon} + \lambda_n \int_\Omega |v_n|^\beta u_n \\ &- \lambda_n \int_\Omega \frac{u}{|v_n|^\alpha + \epsilon} - \lambda_n \int_\Omega |v_n|^\beta u = o_n(1), \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde

$$o_n(1) = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p - \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u_n \nabla u.$$

Então,

$$\|u_n - u\|_{1,p} = o_n(1).$$

Pela condição (k_1), temos

$$a(t) \geq H(a_3)a_2 t^{\frac{q-p}{p}}, \quad \forall\ t > 0.$$

Usando novamente a desigualdade

$$C|x-y|^p \leq \left\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y \right\rangle,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$ e raciocinando como acima concluímos que

$$\|u_n - u\|_{1,q} = o_n(1).$$

Portanto,

$$\|u_n - u\| = o_n(1)$$

e daí conclui-se que S é compacto.

Afirmação 2: O operador S é contínuo.

De fato, sejam $((\lambda_n, v_n)) \subset \mathbb{R}^+ \times X$ e $(\lambda, v) \in \mathbb{R}^+ \times X$ tal que

$$(\lambda_n, v_n) \to (\lambda, v) \text{ em } \mathbb{R}^+ \times X. \tag{1.8}$$

Segue de (1.8) que (λ_n) e (v_n) são limitadas em $\mathbb{R}^+$ e X, respectivamente. Designando por $u_n = S(\lambda_n, v_n)$ e argumentando como na demonstração da compacidade do operador S concluímos que (u_n) é limitada em X e

$$u_n \to u \text{ em } X. \tag{1.9}$$

De (1.9) segue-se que $u = S(\lambda, v)$ mostrando assim que o operador S é contínuo.

Portanto, sendo o operador S contínuo, compacto, $\mathbb{R}^+ \times X$ um espaço de Banach e $S(0,u) = 0$, segue da Proposição 1.1, que existe uma componente não-limitada $C \subset \mathbb{R}^+ \times X$ de soluções da equação

$$S(\lambda, u) = u.$$

Segue da definição do operador S que o par (λ, u) satisfaz

$$(P_{v,\epsilon}) \qquad \begin{cases} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda \Big\{ \dfrac{1}{|u|^\alpha + \epsilon} + |u|^\beta \Big\} \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que se $\lambda = 0$, então $u = 0$ e se $u = 0$ então $\lambda = 0$. Assim, temos que $C - \{(0,0)\}$ é constituído de soluções não-triviais e pelo princípio do máximo $u > 0$ em Ω.

Vamos agora provar que para cada $\lambda > 0$ existe $(\lambda, u) \in C$. Suponhamos o contrário, isto é, que existe um $\lambda^* > 0$ tal que $(\lambda, u) \in C$ implique $\lambda \leq \lambda^*$.

Segue-se da definição do operador S que (λ, u) satisfaz $(P_{v,\epsilon})$ então

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi = \lambda \int_\Omega \frac{\phi}{u^\alpha + \epsilon} + \lambda \int_\Omega \phi u^\beta, \forall\ \phi \in X.$$

Fazendo $\phi = u$ na equação acima, temos

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p = \lambda \int_\Omega \frac{u}{u^\alpha + \epsilon} + \lambda \int_\Omega u^{\beta+1}.$$

Usando a condição (k_1),

$$a_0 \int_\Omega |\nabla u|^p + H(a_3)a_2 \int_\Omega |\nabla u|^q \leq \frac{\lambda}{\epsilon} \int_\Omega u + \lambda \int_\Omega u^{\beta+1}.$$

Se $a_3 = 0$ então $\|u\| = \|u\|_{1,p}$ e $\gamma = p$. Assim, desde que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para $1 \leq s \leq p^*$, segue-se que existem constantes K_1 e K_2, que não dependem de u, de modo que

$$\begin{aligned} a_0\|u\|_{1,p}^p &\leq \frac{\lambda^*}{\epsilon} K_1\|u\| + \lambda^* K_2 \|u\|^{\beta+1} \\ a_0\|u\|^p &\leq \frac{\lambda^*}{\epsilon} K_1\|u\| + \lambda^* K_2 \|u\|^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Como $\beta \in (0, p-1)$ e $p > 1$ temos que $\|u\|$ é limitada.

Se $a_3 > 0$ então $\|u\| = \|u\|_{1,p} + \|u\|_{1,q}$ e $\gamma = q$. Logo,

$$a_0\|u\|_{1,p}^p + a_2\|u\|_{1,q}^q \leq \frac{\lambda^*}{\epsilon}K_1\|u\| + \lambda^* K_2\|u\|^{\beta+1}.$$

Se $\|u\|$ não fosse limitada então teríamos $\|u\| \to +\infty$. Assim, $\|u\|_{1,q}^{q-p} \geq 1$, ou seja, $\|u\|_{1,q}^q \geq \|u\|_{1,q}^p$. Segue-se disso que

$$\begin{aligned} K(\|u\|_{1,p} + \|u\|_{1,q})^p &\leq a_0\|u\|_{1,p}^p + a_2\|u\|_{1,q}^q \\ &\leq \frac{\lambda^*}{\epsilon}K_1\|u\| + \lambda^* K_2\|u\|^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} K\|u\|^p &\leq \frac{\lambda^*}{\epsilon}K_1\|u\| + \lambda^* K_2\|u\|^{\beta+1} \\ K &\leq K_1\frac{\lambda^*}{\epsilon\|u\|^{p-1}} + \lambda^* K_2\frac{1}{\|u\|^{p-1-\beta}}. \end{aligned}$$

Desde que $\|u\| \to +\infty$ então $K \leq 0$ o que é absurdo.

Temos assim que $\|u\|$ é limitada mostrando que C é limitado o que é uma contradição.

Logo, C é ilimitado com respeito ao parâmetro λ e, portanto, fazendo $\lambda = 1$ temos que (λ, u) é solução do problema (P_ϵ) e pelo princípio do máximo $u > 0$ em Ω. $\square$

Antes de provarmos o principal resultado deste capítulo repetiremos aqui, para completeza do nosso trabalho, a demonstração do Lema abaixo cuja demonstração já havia sido feita em [28]:

Lema 1.3 *Sejam $\phi, \varphi > 0$ duas funções quaisquer em $C_0^1(\overline{\Omega})$. Se $\dfrac{\partial \phi}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$ então existe $C > 0$ tal que*

$$\frac{\phi(x)}{\varphi(x)} \geq C > 0, \ \textit{para todo } x \in \Omega.$$

Demonstração. Para $\delta > 0$, suficientemente pequeno, consideremos o conjunto

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Desde que $\phi, \varphi > 0$ em Ω e $\Omega \setminus \Omega_\delta$ é um conjunto compacto, então existe uma constante $m > 0$ tal que

$$\frac{\phi(x)}{\varphi(x)} \geq m, \text{ para todo } x \in \Omega \setminus \Omega_\delta. \tag{1.10}$$

Sendo $\dfrac{\partial \phi}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$ e como $\partial\Omega$ é um conjunto compacto, pois $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado então existe uma constante $C_1 > 0$ satisfazendo

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial \eta} < C_1, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Como $\varphi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \eta} \right| \leq C_2, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Definamos a seguinte função

$$H(x) = \omega\varphi(x) - \phi(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta$$

com $\omega \in \mathbb{R}$ a ser definido posteriormente. Assim,

$$\frac{\partial H(x)}{\partial \eta} = \omega \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \eta} - \frac{\partial \phi(x)}{\partial \eta} \geq \omega k_0 - C_1 > 0, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta,$$

desde que $0 < \omega < \frac{C_1}{k_0}$, onde $k_0 = \inf\limits_{x \in \overline{\Omega}} \dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial \eta}$.

Fixado $x \in \Omega_\delta$ consideremos a função

$$g(x) = H(x + s\eta),$$

onde $s \in \mathbb{R}$ é tomado de modo que $x + s\eta \in \overline{\Omega}$. Para cada $x \in \Omega_\delta$ escolha um único $\bar{x} \in \partial\Omega$ de modo que a reta que passa por esses dois pontos coincida com a reta suporte do vetor normal exterior $\eta = \eta(\bar{x})$. Logo, existe $\hat{s} > 0$ tal que

$$x + \hat{s}\eta = \bar{x} \in \partial\Omega.$$

Desde que $H(\partial\Omega) \equiv 0$, segue-se

$$g(\hat{s}) = H(x + \hat{s}\eta) = H(\bar{x}) = 0.$$

Sendo g uma composição de funções de classe C^1, então $g : [0, \hat{s}] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[0, \hat{s}]$ e derivável em $(0, \hat{s})$. Pelo Teorema do Valor Médio existe $\xi \in (0, \hat{s})$, tal que,

$$g(\hat{s}) - g(0) = g'(\xi)(\hat{s} - 0),$$

ou seja,

$$0 - g(0) = g'(\xi)\hat{s}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial v}(x + \xi\eta) &= \lim_{t\to 0} \frac{H(x + \xi\eta + t\eta) - H(x + \xi\eta)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{H(x + (\xi + t)\eta) - H(x + \xi\eta)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{g(t + \xi) - g(\xi)}{\xi} \\
&= g'(\xi),
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$-H(x) = \frac{\partial H}{\partial \eta}(x + \xi\eta)\hat{s} > 0 \text{ em } \Omega_\delta.$$

Logo,

$$H(x) < 0 \text{ em } \Omega_\delta,$$

assim

$$\omega\varphi(x) - \phi(x) \leq 0, \ \forall\, x \in \Omega_\delta$$

implicando que

$$\omega\varphi(x) \leq \phi(x), \ \forall\, x \in \Omega_\delta$$

ou ainda,

$$\frac{\phi(x)}{\varphi(x)} \geq \omega > 0, \ \forall\, x \in \Omega_\delta. \tag{1.11}$$

Segue de (1.10) e (1.11) que existe uma constante $C > 0$ onde $C = min\{m, \omega\}$ de modo que

$$\frac{\phi(x)}{\varphi(x)} \geq C, \ \forall \ x \in \Omega.$$

Para mostrarmos a existência de solução para o problema original necessitaremos do seguinte Lema:

Lema 1.4 *Seja Ω um domínio limitado com fronteira suave. Se $u \in C^1(\overline{\Omega}) \bigcap W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ e*

$$\begin{cases} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \geq 0 \\ u > 0 \ em \ \ \Omega, \\ u = 0 \ sobre \ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

então $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$, onde η é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$.

Demonstração. Argumentando de forma análoga a [30], basta substituir $\Delta_p u$ por $-div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ e o princípio de comparação fraco do operador p-Laplaciano pelo princípio de comparação fraco dado pelo Lema 1.2. □

1.2 Demonstração do Resultado Principal

Demonstração do Teorema 1.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sejam $\epsilon = \frac{1}{n}$ e u_n uma solução do problema

$$\begin{cases} -div\ (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n) = \dfrac{1}{u_n^\alpha + \frac{1}{n}} + u_n^\beta \text{ em } \ \Omega, \\ u_n > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ u_n = 0 \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

a qual é garantida pelo Teorema 1.2.

Observe que

$$\begin{cases} -div\ (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n) \geq \dfrac{1}{u_n^\alpha + 1} + u_n^\beta \text{ em } \ \Omega, \\ u_n > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ u_n = 0 \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Sendo a função $t \to \frac{1}{t^\alpha+1}+t^\beta$ contínua e coerciva, para $t \geq 0$, a mesma é limitada inferiormente e atinge um mínimo positivo m. Assim,

$$-div\ (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n) \geq m.$$

Seja w a única solução positiva de

$$\begin{cases} -div\ (a(|\nabla w|^p)|\nabla w|^{p-2}\nabla w) = m \text{ em } \ \Omega, \\ w = 0 \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue-se assim que

$$\begin{cases} -div\ (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n) \geq -div(a(|\nabla w|^p)|\nabla w|^{p-2}\nabla w) \text{ em } \ \Omega, \\ u_n = w \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando o Lema 1.2 temos que $u_n \geq w > 0$ em Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p \leq \int_\Omega u_n^{1-\alpha} + \int_\Omega u_n^{\beta+1}$$

o que nos mostra, usando a condição (k_1), que (u_n) é limitada em X.

Sendo X um espaço de Banach reflexivo então, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } X$$

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^s(\Omega), \ \text{ para todo } \ 1 \leq s < \gamma^*,$$

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Como u_n é solução do problema

$$\begin{cases} -div\ (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n) = \dfrac{1}{u_n^\alpha + \frac{1}{n}} + u_n^\beta \text{ em } \ \Omega, \\ u_n > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ u_n = 0 \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando u_n como função teste temos

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p \;=\; \int_\Omega \left(\frac{1}{u_n^\alpha + \frac{1}{n}} + u_n^\beta\right) u_n.$$

Segue-se da desigualdade (1.1) que

$$\begin{aligned}
C\|u_n - u\|_{1,p}^p &\leq \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p \\
&- \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u + o_n(1) \\
&= \int_\Omega \frac{u_n}{u_n^\alpha + \frac{1}{n}} + \int_\Omega u_n^{\beta+1} \\
&- \int_\Omega \frac{u}{u_n^\alpha + \frac{1}{n}} - \int_\Omega u_n^\beta u = o_n(1),
\end{aligned} \tag{1.12}$$

onde

$$o_n(1) = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p - \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u_n \nabla u.$$

Então,

$$\|u_n - u\|_{1,p} = o_n(1).$$

Argumentando como anteriormente, temos

$$\|u_n - u\|_{1,q} = o_n(1)$$

e, portanto,

$$\|u_n - u\| = o_n(1)$$

mostrando que $u_n \to u$ em X.

Assim, $\nabla u_n \to \nabla u$ em $(L^\gamma(\Omega))^N$ e, portanto, para todo $i = 1, ..., N$ temos

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Consequentemente,

$$|\nabla u_n(x)|^{p-2} \to |\nabla u(x)|^{p-2} \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Para cada i, consideremos

$$g_{n,i}(x) = a(|\nabla u_n(x)|^p)|\nabla u_n(x)|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$$

e

$$g_i(x) = a(|\nabla u(x)|^p)|\nabla u(x)|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Sendo a uma função contínua resulta que

$$g_{n,i}(x) \to g_i(x) \text{ q.t.p em } \ \Omega.$$

Note que para cada i, $\int_\Omega |g_{n,i}|^{\frac{p}{p-1}}dx \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois

$$\begin{aligned} \int_\Omega |g_{n,i}|^{\frac{p}{p-1}} &= \int_\Omega \left| a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{\frac{p}{p-1}} \\ &= \int_\Omega \left(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|\right)^{\frac{p}{p-1}}. \end{aligned}$$

Como para cada i temos

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| \leq \left(\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right|^2 + ... + \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_N}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\nabla u_n|,$$

então

$$a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| \leq a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-1}.$$

Obtemos assim que

$$\int_\Omega |g_{n,i}|^{\frac{p}{p-1}} \leq \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}.$$

Usando a hipótese (k_1) segue-se

$$a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-1} \leq a_1|\nabla u_n|^{p-1} + a_3|\nabla u_n|^{q-1}.$$

Note que se $a_3 = 0$ então $\|u_n\| = \|u_n\|_{1,p}$ e $\gamma = p$ e assim

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |g_{n,i}|^{\frac{p}{p-1}} &\leq a_1 \int |\nabla u_n|^p \\
&= a_1 \|u_n\|^p \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

pois (u_n) é limitada em X. Desta forma, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(g_{n,i}) \subset L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ e, analogamente, $g_i \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$.

Se $a_3 > 0$ então $\gamma = q$ e $\|u_n\| = \|u_n\|_{1,p} + \|u_n\|_{1,q}$ e assim

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |g_{n,i}|^{\frac{q}{q-1}} &\leq \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-1})^{\frac{q}{q-1}} \\
&\leq \int_\Omega \left[a_1|\nabla u_n|^{p-1} + a_3|\nabla u_n|^{q-1}\right]^{\frac{q}{q-1}} \\
&= C_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^{\frac{q(p-1)}{q-1}} + C_2 \int_\Omega |\nabla u_n|^q \\
&\leq C_1 |\Omega|^{\frac{q-p}{q-1}} \|u_n\|_{1,q}^{\frac{q(p-1)}{q-1}} + C_2 \|u_n\|_{1,q}^q \\
&= C|\Omega|^{\frac{q-p}{q-1}} C^{\frac{q(p-1)}{q-1}} + C_2 C^q,
\end{aligned}$$

pois, (u_n) é limitada em X. Logo, $(g_{n,i}) \subset L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$.

Desde que $\frac{\gamma}{\gamma-1} > 1$ e $\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} = 1$ segue-se do Lema de Brezis-Lieb que, para cada i

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx \to \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx,\ \forall\ \varphi \in X. \tag{1.13}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi\ dx \\
= &\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \cdots + \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \; dx \\
= \; &\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \cdots + \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}.
\end{aligned}$$

Logo, da convergência em (1.13) temos

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi \; dx \to \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \; dx, \; \forall \; \varphi \in X. \tag{1.14}$$

Temos que $u_n \geq w > 0$ em Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$ e como

$$\begin{cases} -div \; (a(|\nabla w|^p)|\nabla w|^{p-2}\nabla w) = m \text{ em } \Omega, \\ w > 0 \text{ em } \Omega, \\ w = 0 \text{ em } \; \partial\Omega \end{cases}$$

então usando a condição (k_1), podemos argumentar como em [20] para concluir que $w \in C^1(\overline{\Omega})$ e pelo Lema 1.4 temos $\dfrac{\partial w}{\partial \eta} < 0$ sobre $\partial\Omega$. Então, para cada $x \in \Omega$, segue-se do Lema 1.3 que

$$u_n(x) \geq w(x) > Cd(x) > 0,$$

onde $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$ e C é uma constante positiva que não depende de x. Assim,

$$\left|\frac{\varphi}{u_n^\alpha + \frac{1}{n}}\right| \leq \frac{|\varphi|}{|u_n^\alpha|} \leq \frac{|\varphi|}{Cd(x)^\alpha} = h \in L^1(\Omega),$$

pois pela desigualdade de Hardy-Sobolev, ver Proposição A.1 no Apêndice, temos $\frac{|\varphi|}{Cd(x)^\alpha} = h \in L^p(\Omega)$ e sendo $p > 1$ e Ω é um domínio limitado então $\frac{|\varphi|}{Cd(x)^\alpha} = h \in L^1(\Omega)$.
Desde que

$$\frac{\varphi(x)}{u_n^\alpha(x) + \frac{1}{n}} \to \frac{\varphi(x)}{u^\alpha(x)} \text{ q.t.p em } \Omega,$$

então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \frac{\varphi}{u_n^\alpha + \frac{1}{n}} \to \int_\Omega \frac{\varphi}{u^\alpha}. \tag{1.15}$$

Analogamente,

$$\int_\Omega u_n^\beta \varphi \to \int_\Omega u^\beta \varphi. \tag{1.16}$$

Sendo (u_n) uma solução do problema auxiliar temos

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \varphi = \int_\Omega \left[\frac{1}{u_n^\alpha + \frac{1}{n}} + u_n^\beta\right]\varphi,\ \forall\ \varphi \in X.$$

Passando ao limite na expressão acima e usando as convergências (1.14), (1.15) e (1.16) obtemos

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega \left[\frac{1}{u^\alpha} + u^\beta\right]\varphi,\ \forall\ \varphi \in X.$$

Portanto, $u \in X$ é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \frac{1}{u^\alpha} + u^\beta \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando regularidade elíptica $u \in C^1(\overline{\Omega})$, o que pode ser visto em [20]. Segue-se do Lema 1.2 que u é não-trivial e pelo princípio do máximo $u > 0$. □

Capítulo 2

Existência de Solução Positiva para um Sistema Singular Envolvendo Operadores Quasilineares

No presente capítulo, estudamos um resultado sobre a existência e positividade de solução para o seguinte sistema elíptico:

$$(P) \qquad \begin{cases} -div\ (a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) = h_1(x)v^{-\gamma_1} + k_1(x)v^{\alpha_1} \text{ em } \Omega, \\ -div\ (a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v) = h_2(x)u^{-\gamma_2} + k_2(x)u^{\alpha_2} \text{ em } \Omega, \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave com $N \geq 3$, $2 \leq p_i < N$, para $i = 1, 2$. Além disso, $\alpha_i, \gamma_i \in (0, p_i - 1)$, $a_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1 e h_i, k_i são funções contínuas. Mais precisamente, vamos supor que as funções h_i, k_i e a_i satisfazem as seguintes hipóteses:

(A_1) Existem constantes reais $\xi_0, \xi_1, \xi_2 > 0$, $\xi_3 \geq 0$ e $p_i < q_i < N$ (para $i = 1, 2$) tal que

$$\xi_0 + H(\xi_3)\xi_1 t^{\frac{q_i - p_i}{p_i}} \leq a_i(t) \leq \xi_2 + \xi_3 t^{\frac{q_i - p_i}{p_i}},\ \forall\ t \geq 0,$$

onde $H : [0, +\infty) \to \{0, 1\}$ é a função dada por

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t > 0 \\ 0 & \text{se} \quad t = 0. \end{cases}$$

(A_2) A aplicação $g_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, dada por $g_i(t) = a_i(t^p)t^{p-2}$ é crescente.

(A_3) $h_i, k_i : \overline{\Omega} \to (0, +\infty)$ são funções contínuas com $h_i(x), k_i(x) \neq 0$.

Neste capítulo, trabalharemos com o espaço de Banach $X = W_0^{1,\beta_1}(\Omega) \times W_0^{1,\beta_2}(\Omega)$ munido com a norma

$$\|(u, v)\| = \|u\|_{1,\beta_1} + \|v\|_{1,\beta_2},$$

onde

$$\|u\|_{1,\beta_i} = \|u\|_{1,p_i} + H(\xi_3)\|u\|_{1,q_i}.$$

Usaremos o seguinte problema auxiliar para mostrarmos a existência de solução para o problema (P) :

$$(P_\epsilon) \qquad \begin{cases} -div\ (a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) = \frac{h_1(x)}{(\epsilon+|v|)^{\gamma_1}} + k_1(x)|v|^{\alpha_1} \text{ em } \Omega, \\ -div\ (a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v) = \frac{h_2(x)}{(\epsilon+|u|)^{\gamma_2}} + k_2(x)|u|^{\alpha_2} \text{ em } \Omega, \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $0 < \epsilon < 1$.

Usando o resultado de Rabinowitz, mencionado na Proposição 1.1 do Capítulo 1, mostraremos que o problema auxiliar possui uma solução.

Definamos o que é uma solução fraca para o problema (P).

Definição 2.1 *Dizemos que o par $(u, v) \in X = W_0^{1,\beta_1}(\Omega) \times W_0^{1,\beta_2}(\Omega)$ é uma solução para o problema (P) se*

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\nabla\phi\ dx = \int_\Omega \left[\frac{h_1(x)}{v^{\gamma_1}} + k_1(x)v^{\alpha_1}\right]\phi\ dx,$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v\nabla\varphi\, dx = \int_\Omega \left[\frac{h_2(x)}{u^{\gamma_2}} + k_2(x)u^{\alpha_2}\right]\varphi\, dx,$$

para todo $(\phi,\varphi)\in X$. *Além disso, dizemos que tal solução* (u,v) *é positiva se* $u,v>0$.

2.1 Primeiro Resultado de Existência: O Problema Auxiliar

Nesta seção, mostraremos que o problema auxiliar (P_ϵ) descrito acima verifica o seguinte resultado:

Teorema 2.1 *Para cada* $\epsilon>0$ *e* $\alpha_i,\gamma_i\in(0,p_i-1)$ *com* $i=1,2$, *o problema* (P_ϵ) *possui uma solução positiva.*

Demonstração. Seja $0<\epsilon<1$ e para cada $v\in X$ e $\lambda\geq 0$ consideremos o problema

$$(\bar{P})\qquad \begin{cases} -div\ (a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) = \lambda\left[\frac{h_1(x)}{(\epsilon+|v|)^{\gamma_1}} + k_1(x)|v|^{\alpha_1}\right] \text{ em } \Omega,\\ -div\ (a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v) = \lambda\left[\frac{h_2(x)}{(\epsilon+|u|)^{\gamma_2}} + k_2(x)|u|^{\alpha_2}\right] \text{ em } \Omega,\\ u=v=0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Demonstraremos que para cada $\lambda>0$ o sistema $(\bar{P})$ possui uma solução positiva $(u_{\epsilon_\lambda},v_{\epsilon_\lambda})$. Consequentemente, encontraremos uma solução positiva (u_ϵ,v_ϵ) se $\lambda=1$. Fazendo $\epsilon\to 0$ teremos uma solução para o problema original.

Pelo Teorema de Minty-Browder (ver Teorema A.6 no Apêndice) temos a unicidade de solução para os problemas

$$\begin{cases} -div\ (a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) = \lambda\left[\frac{h_1(x)}{(\epsilon+|g|)^{\gamma_1}} + k_1(x)|g|^{\alpha_1}\right] \text{ em } \Omega,\\ u=0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -div\ (a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v) = \lambda\left[\frac{h_2(x)}{(\epsilon+|f|)^{\gamma_2}} + k_2(x)|f|^{\alpha_2}\right] \text{ em } \Omega,\\ v=0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

onde $f\in W_0^{1,\beta_1}(\Omega)$ e $g\in W_0^{1,\beta_2}(\Omega)$.

Deste modo, fica bem definido o operador

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^+ \times X &\rightarrow X \\ (\lambda, f, g) &\mapsto T(\lambda, f, g) = (u, v), \end{aligned}$$

onde o par (u, v) é solução do problema $(\bar{P})$.

Afirmação 1: O operador T é compacto.

Seja $((\lambda_n, f_n, g_n)) \subset \mathbb{R}^+ \times X$ uma sequência limitada e $T(\lambda_n, f_n, g_n) = (u_n, v_n)$. Segue-se da definição do operador T que (u_n, v_n) satisfaz

$$\begin{cases} -div\ (a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n) = \lambda_n \left[\frac{h_1(x)}{(\epsilon+|g_n|)^{\gamma_1}} + k_1(x)|g_n|^{\alpha_1}\right] \text{ em } \Omega, \\ -div\ (a_2(|\nabla v_n|^{p_2})|\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n) = \lambda_n \left[\frac{h_2(x)}{(\epsilon+|f_n|)^{\gamma_2}} + k_2(x)|f_n|^{\alpha_2}\right] \text{ em } \Omega, \\ u_n = v_n = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n \nabla \phi \\ = \ &\lambda_n \int_\Omega \left[\frac{h_1(x)}{(\epsilon+|g_n|)^{\gamma_1}} + k_1(x)|g_n|^{\alpha_1}\right]\phi,\ \forall\ \phi \in W_0^{1,\beta_1}(\Omega) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a_2(|\nabla v_n|^{p_2})|\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n \nabla \varphi \\ = \ &\lambda_n \int_\Omega \left[\frac{h_2(x)}{(\epsilon+|f_n|)^{\gamma_2}} + k_2(x)|f_n|^{\alpha_2}\right]\varphi,\ \forall\ \varphi \in W_0^{1,\beta_2}(\Omega). \end{aligned}$$

Em particular, tomando $\phi = u_n$ e $\varphi = v_n$ nas equações acima temos

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1} = \lambda_n \int_\Omega \left[\frac{h_1(x)u_n}{(\epsilon+|g_n|)^{\gamma_1}} + k_1(x)|g_n|^{\alpha_1}u_n\right]$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v_n|^{p_2})|\nabla v_n|^{p_2} = \lambda_n \int_\Omega \left[\frac{h_2(x)v_n}{(\epsilon+|f_n|)^{\gamma_2}} + k_2(x)|f_n|^{\alpha_2}v_n\right].$$

Pelas imersões de Sobolev segue-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{h_1(x)u_n}{(\epsilon+|g_n|)^{\gamma_1}} &\leq \frac{1}{\epsilon^{\gamma_1}}\int_\Omega |h_1(x)||u_n| \\
&\leq \frac{|h_1|_\infty}{\epsilon^{\gamma_1}}|u_n|_1 \\
&\leq C_\epsilon \|u_n\|_{1,\beta_1}.
\end{aligned}$$

Desde que $\alpha_i \in (0, p_i - 1)$ com $i = 1, 2$, usando a desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{p_1}{\alpha_1}$ e $\frac{p_1}{p_1-\alpha_1}$, a condição (A_1) e as imersões de Sobolev temos

$$\xi_0\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1} + H(\xi_3)\xi_2\int_\Omega |\nabla u_n|^{q_1} \tag{2.1}$$

$$\leq \lambda_n C_\epsilon \|u_n\|_{1,\beta_1} + |k_1|_\infty \|g_n\|^{\alpha_1}_{1,\beta_1}\|u_n\|_{1,\beta_1}. \tag{2.2}$$

Sendo (λ_n) e $(\|g_n\|^{\alpha_1}_{1,\beta_1})$ limitadas em $\mathbb{R}^+$, temos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,\beta_1}(\Omega)$, pois do contrário existiria uma subsequência, que continuaremos denotando por u_n, tal que $\|u_n\| \to +\infty$.

Usando a definição da norma devemos considerar os casos:

(i) $\|u_n\|_{1,p_1} \to +\infty$ e $\|u_n\|_{1,q_1} \to +\infty$

(ii) $\|u_n\|_{1,p_1} \to +\infty$ e $\|u_n\|_{1,q_1}$ é limitada.

(iii) $\|u_n\|_{1,p_1}$ é limitada e $\|u_n\|_{1,q_1} \to +\infty$.

No caso (i) desde que $\|u_n\|_{1,q_1} \to \infty$ então para n suficientemente grande temos $\|u_n\|^{q_1-p_1}_{1,q_1} \geq 1$, ou seja, $\|u_n\|^{q_1}_{1,q_1} \geq \|u_n\|^{p_1}_{1,q_1}$. Se $\xi_3 = 0$ então $\|u_n\|_{1,\beta_1} = \|u_n\|_{1,p_1}$ e já temos o desejado.

Suponhamos agora que $\xi_3 > 0$ então neste caso temos $\|u_n\|_{1,\beta_1} = \|u_n\|_{1,p_1} + \|u_n\|_{1,q_1}$. Segue de (2.5) que

$$\xi_0\|u_n\|^{p_1}_{1,p_1} + \xi_2\|u_n\|^{p_1}_{1,q_1} \leq \xi_0\|u_n\|^{p_1}_{1,p_1} + \xi_2\|u_n\|^{q_1}_{1,q_1} \leq C\|u_n\|_{1,\beta_1}.$$

Logo,

$$C_1(\|u_n\|_{1,p_1} + \|u_n\|_{1,q_1})^{p_1} \leq \xi_0\|u_n\|^{p_1}_{1,p_1} + \xi_2\|u_n\|^{p_1}_{1,q_1} \leq C\|u_n\|_{1,\beta_1}$$

ou ainda,

$$C_1\|u_n\|_{1,\beta_1}^{p_1} \leq C\|u_n\|_{1,\beta_1}.$$

Assim,

$$\frac{C_1}{C} \leq \frac{1}{\|u_n\|_{1,\beta_1}^{p-1}}.$$

Fazendo $\|u_n\|_{1,\beta_1} \to +\infty$ teríamos $\frac{C_1}{C} \leq 0$ o que é absurdo. Portanto, (u_n) é limitada em $W_0^{1,\beta_1}(\Omega)$. Para o item (ii) e (iii) procedemos de maneira similar ao que fizemos no Capítulo 1. Analogamente, mostra-se que (v_n) é limitada em $W_0^{1,\beta_2}(\Omega)$.

Então, a menos de subsequência, temos

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ para algum } \ u \in W_0^{1,\beta_1}(\Omega),$$

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^s(\Omega), \ \text{ para todo } \ 1 \leq s < \beta_1^*,$$

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega,$$

$$v_n \rightharpoonup v \ \text{ para algum } \ v \in W_0^{1,\beta_2}(\Omega),$$

$$v_n \to v \ \text{ em } \ L^s(\Omega), \ \text{ para todo } \ 1 \leq s < \beta_2^*,$$

$$v_n(x) \to v(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega,$$

$$f_n \rightharpoonup f \ \text{ para algum } \ f \in W_0^{1,\beta_1}(\Omega),$$

$$f_n \to f \ \text{ em } \ L^s(\Omega), \ \text{ para todo } \ 1 \leq s < \beta_1^*,$$

$$f_n(x) \to f(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega,$$

e

$$\lambda_n \to \lambda \geq 0.$$

Observando que

$$\left|\frac{h_1(x)u_n}{(|g_n| + \epsilon)^{\gamma_1}}\right| \leq \frac{C}{\epsilon^{\gamma_1}}|u_n|$$

e desde que $u_n(x) \to u(x)$ em $L^s(\Omega)$, $1 \leq s < \beta_1^*$, segue-se

$$|u_n(x)| \to |u(x)| \ \text{ q.t.p em } \ \Omega$$

e existe $z \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|u_n(x)| \leq z(x) \ \text{ q.t.p em } \Omega, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\left|\frac{h_1(x)u_n}{(|g_n|+\epsilon)^{\gamma_1}}\right| \leq \frac{C}{\epsilon^{\gamma_1}}|u_n| \leq \frac{C}{\epsilon^{\gamma_1}} z \in L^1(\Omega).$$

Além disso,

$$\frac{h_1(x)u_n}{(|g_n|+\epsilon)^{\gamma_1}} \to \frac{h_1(x)u}{(|g|+\epsilon)^{\gamma_1}} \ \text{q.t.p em } \Omega.$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \frac{h_1(x)u_n}{(|g_n(x)|+\epsilon)^{\gamma_1}} \to \int_\Omega \frac{h_1(x)u}{(|g(x)|+\epsilon)^{\gamma_1}}. \tag{2.3}$$

Considerando $\varphi_n(x) = |g_n(x)|^{\alpha_1}$ e desde que $g_n(x) \to g(x)$ q.t.p em Ω então

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x) \text{ q.t.p em } \Omega,$$

onde $\varphi(x) = |g(x)|^{\alpha_1}$.

Usando a imersão contínua de Sobolev $W_0^{1,\beta_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\beta_1}(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega |\varphi_n(x)|^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}} = |\varphi_n(x)|_{\beta_1}^{\beta_1} \leq C_1^{\beta_1}\|\varphi_n\|_{1,\beta_1}^{\beta_1} \leq K,$$

pois, (g_n) é limitada em $W_0^{1,\beta_1}(\Omega)$ onde $K = (C_1C_2)^{\beta_1} > 0$. Note que $k_1 \in L^{\frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha_1-1}}(\Omega)$, $|g_n(x)|^{\alpha_1} \in L^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}(\Omega)$, $\frac{\beta_1-\alpha_1-1}{\beta_1} + \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_1} = 1$ e $\frac{\beta_1}{\alpha_1} > 1$. Assim, pelo Lema de Brezis-Lieb

$$\int_\Omega k_1|g_n|^{\alpha_1}v \to \int_\Omega k_1|g|^{\alpha_1}v, \ \forall\ v \in W_0^{1,\beta_1}(\Omega)$$

e, em particular,
$$\int_\Omega k_1|g_n|^{\alpha_1}u \to \int_\Omega k_1|g|^{\alpha_1}u. \tag{2.4}$$
Usando a desigualdade
$$C|x-y|^{p_1} \leq \left\langle a_1(|x|^{p_1})|x|^{p_1-2}x - a_1(|y|^{p_1})|y|^{p_1-2}y, x-y\right\rangle,$$
para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$, e as convergências (2.3), (2.4) obtemos
$$\begin{aligned}
C\|u_n - u\|_{1,p_1}^{p_1} &\leq \int_\Omega a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1} \\
&- \int_\Omega a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n \nabla u + o_n(1) \\
&= \lambda_n \int_\Omega \frac{h_1(x)u_n}{(|g_n|+\epsilon)^{\gamma_1}} + \lambda_n \int_\Omega k_1(x)|g_n|^{\alpha_1}u_n \\
&- \lambda_n \int_\Omega \frac{h_1(x)u}{(|g_n|+\epsilon)^{\gamma_1}} - \lambda_n \int_\Omega k_1(x)|g_n|^{\alpha_1}u = o_n(1),
\end{aligned}$$
onde devido a convergência $u_n \rightharpoonup u$ temos
$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla(u_n - u) = o_n(1).$$
Usando a condição (A_1) e de modo análogo ao que foi feito no Capítulo 1 segue-se
$$\|u_n - u\|_{1,q_1} = o_n(1),$$
Assim, a menos de subsequência, temos
$$\|u_n - u\|_{1,\beta_1} = o_n(1).$$
Analogamente, $v_n \to v$ em $W_0^{1,\beta_2}(\Omega)$. Mostrando assim a compacidade do operador T.

A continuidade do operador T segue os mesmos argumentos utilizados no Capítulo 1.

Portanto, como o operador T é contínuo, compacto, $\mathbb{R}^+ \times X$ é um espaço de Banach e $T(0, u, v) = (0, 0)$ segue assim da Proposição 1.1 que existe uma componente ilimitada

$\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times X$ de soluções da equação

$$T(\lambda, u, v) = (u, v).$$

Segue-se da definição do operador T que (λ, u, v) satisfaz

$$\begin{cases} -div\ (a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) = \lambda \left[\frac{h_1(x)}{(\epsilon+|v|)^{\gamma_1}} + k_1(x)|v|^{\alpha_1}\right] \text{ em } \ \Omega, \\ -div\ (a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v) = \lambda \left[\frac{h_2(x)}{(\epsilon+|u|)^{\gamma_2}} + k_2(x)|u|^{\alpha_2}\right] \text{ em } \ \Omega, \\ u = v = 0 \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim,

(1) Se $\lambda = 0$ então $(u, v) = (0, 0)$;

(2) Se $u = 0$ então $\lambda = 0$;

(3) Se $v = 0$ então $\lambda = 0$.

Logo, $\mathcal{C} - \{(0, 0, 0)\}$ é constituído de soluções (λ, u, v) quando $\lambda > 0$. Suponhamos agora que $\mathcal{C}$ seja limitado com respeito ao parâmetro λ, isto é, que existe $\lambda^* > 0$ tal que para $(\lambda, u, v) \in \mathcal{C} - \{(0, 0, 0)\}$ tenhamos $\lambda^* \leq \lambda$. Então (λ, u, v) satisfaz $(\bar{P}_\lambda)$ e assim

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1} = \lambda \int_\Omega \left[\frac{h_1(x)u}{(\epsilon + |v|)^{\gamma_1}} + k_1(x)|v|^{\alpha_1}u\right]$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2} = \lambda \int_\Omega \left[\frac{h_2(x)v}{(\epsilon + |u|)^{\gamma_2}} + k_2(x)|u|^{\alpha_2}v\right].$$

Da condição (A_1) temos

$$\xi_0 \int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1} + H(\xi_3)\xi_2 \int_\Omega |\nabla u_n|^{q_1} \leq \lambda \int_\Omega \left[\frac{h_1(x)u}{(\epsilon + |v|)^{\gamma_1}} + k_1(x)|v|^{\alpha_1}u\right]. \tag{2.5}$$

Além disso, usando a desigualdade de Hölder e imersão de Sobolev temos

$$\int_\Omega \frac{h_1(x)u}{(\epsilon+|v|)^{\gamma_1}} \leq C_\epsilon |h|_{\beta_1} \|u\|_{1,\beta_1}$$

e

$$\int_\Omega k_1(x)|v|^{\alpha_1}u \leq |k_1|_{\frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha_1-1}} \|v\|_{1,\beta_2}^{\alpha_1} \|u\|_{1,\beta_1}.$$

Então, de (2.5) temos

$$\xi_0 \|u\|_{1,p_1}^{p_1} + H(\xi_3)\xi_2 \|u\|_{1,q_1}^{q_1} \leq C_\epsilon^{'} \left[\|u\|_{1,\beta_1} + \|v\|_{1,\beta_2}^{\alpha_1} \|u\|_{1,\beta_1} \right]$$

e

$$\xi_0 \|v\|_{1,p_2}^{p_2} + H(\xi_3)\xi_2 \|v\|_{1,q_2}^{q_2} \leq C_\epsilon^{'} \left[\|v\|_{1,\beta_2} + \|v\|_{1,\beta_2} \|u\|_{1,\beta_1}^{\alpha_2} \right],$$

o que implica

$$\begin{aligned} & \xi_0 \|u\|_{1,p_1}^{p_1} + H(\xi_3)\xi_2 \|u\|_{1,q_1}^{q_1} + \xi_0 \|v\|_{1,p_2}^{p_2} + H(\xi_3)\xi_2 \|v\|_{1,q_2}^{q_2} \\ \leq \; & C_\epsilon^{'} \left[\|u\|_{1,\beta_1} + \|v\|_{1,\beta_2}^{\alpha_1} \|u\|_{1,\beta_1} + \|v\|_{1,\beta_2} + \|v\|_{1,\beta_2} \|u\|_{1,\beta_1}^{\alpha_2} \right]. \end{aligned}$$

Assim, $\|u\|_{1,\beta_1}$ e $\|v\|_{1,\beta_2}$ são limitadas e portanto $\mathcal{C}$ limitado o que é uma contradição. Deste modo, fazendo $\lambda = 1$ temos que o par (u_ϵ, v_ϵ) é uma solução para o problema (P_ϵ) e pelo princípio do máximo temos que $u_\epsilon, v_\epsilon > 0$. □

2.2 Demonstração do Resultado Principal

Nesta seção demonstraremos a existência de solução para o problema original (P). Mais precisamente demonstraremos o seguinte teorema:

Teorema 2.2 *Suponhamos que sejam válidas as condições* $(A_1) - (A_3)$, $2 \leq p_i < N$ *e* $\alpha_i, \gamma_i \in (0, p_i - 1)$ *para* $i = 1, 2$. *Então o problema* (P) *possui uma solução positiva.*

Demonstração. Para cada $\epsilon = \frac{1}{n}$, seja $u_{\frac{1}{n}} = u_n$ e $v_{\frac{1}{n}} = v_n$ uma solução do problema (P_n) obtida no teorema 2.1, isto é,

$$\begin{cases} -div\ (a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n) = \frac{h_1(x)}{(\frac{1}{n}+v_n)^{\gamma_1}} + k_1(x)v_n^{\alpha_1} \text{ em } \Omega, \\ -div\ (a_2(|\nabla v_n|^{p_2})|\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n) = \frac{h_2(x)}{(\frac{1}{n}+u_n)^{\gamma_2}} + k_2(x)u_n^{\alpha_2} \text{ em } \Omega, \\ u_n = v_n = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, da equação

$$-div\ (a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n) = \frac{h_1(x)}{(\frac{1}{n}+v_n)^{\gamma_1}} + k_1(x){v_n}^{\alpha_1} \text{ em } \Omega$$

temos

$$\begin{aligned} -div\ (a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n) &\geq \frac{h_1(x)}{(1+v_n)^{\gamma_1}} + k_1(x){v_n}^{\alpha_1} \text{ em } \Omega \\ &\geq \frac{h_0}{(1+v_n)^{\gamma_1}} + k_0{v_n}^{\alpha_1}, \end{aligned}$$

onde $h_0 = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} h(x)$ e $k_0 = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} k(x)$.

Como a função $t \mapsto \frac{h_0}{(1+t)^{\gamma_1}} + k_0 t^{\alpha_1}$ é contínua e coerviva, para $t \geq 0$, então a mesma é limitada inferiormente e atinge um mínimo positivo m_1. Assim,

$$-div\ (a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n) \geq m_1.$$

Seja z_1 a única solução positiva de

$$\begin{cases} -div\ (a_1(|\nabla z_1|^{p_1})|\nabla z_1|^{p_1-2}\nabla z_1) = m_1 \text{ em } \Omega, \\ z_1 = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

de modo que

$$\begin{cases} -div\ (a(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n) \geq -div(a(|\nabla z_1|^{p_1})|\nabla z_1|^{p_1-2}\nabla z_1) \text{ em } \Omega, \\ u_n = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Lema 1.2, $u_n \geq z_1 > 0$ em Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente mostra-se que $v_n \geq z_2 > 0$ em Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde z_2 satisfaz

$$\begin{cases} -div\ (a_2(|\nabla z_2|^{p_2})|\nabla z_2|^{p_2-2}\nabla z_2) = m_2 \text{ em } \Omega, \\ z_2 = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

e m_2 é o mínimo positivo da função $t \mapsto \frac{h_0}{(1+t)^{\gamma_2}} + k_0 t^{\alpha_2}$.

Como

$$\begin{cases} -div\ (a_i(|\nabla z_i|^{p_1})|\nabla z_i|^{p_1-2}\nabla z_i) = m_i \text{ em } \Omega, \\ z_i > 0 \text{ em } \Omega, \\ z_i = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

e vale a condição (A_1), argumentando como em [20] concluímos que $z_i \in C^1(\overline{\Omega}) \bigcap W_0^{1,\beta_i}(\Omega)$. Usando o Lema 1.4 temos $\dfrac{\partial z_i}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$.

Então, para cada $x \in \Omega$, segue-se do Lema 1.3 que

$$u_n(x) \geq z_1(x) > Cd(x) > 0 \ \text{ e } \ v_n(x) \geq z_2(x) > Cd(x) > 0,$$

onde $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$ e C é uma constante positiva que não depende de x.

Portanto,

$$\int_\Omega \frac{h_1(x)u_n}{(\frac{1}{n}+v_n)^{\gamma_1}} \leq \int_\Omega \frac{h_1(x)u_n}{v_n^{\gamma_1}} \leq \int_\Omega \frac{h_1(x)u_n}{Cd(x)^{\gamma_1}} \leq \overline{h}\int_\Omega \frac{u_n}{Cd(x)^{\gamma_1}},$$

onde $\overline{h} = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} h_1(x)$. Pela desigualdade de Hardy-Sobolev (ver Proposição A.1 no Apêndice) temos

$$\left|\frac{u_n}{d(x)^{\gamma_1}}\right|_1 \leq C|\nabla u_n|_{\beta_1}.$$

$$\int_\Omega \frac{h_1(x)u_n}{(\frac{1}{n}+v_n)^{\gamma_1}} \leq C_2|\nabla u_n|_{\beta_1} \leq C_3(\|u_n\|_{1,p_1} + H(\xi_3)\|u_n\|_{1,q_1}).$$

Como $\alpha_1 \in (0, p_1-1)$ usando a desigualdade de Hölder com $\frac{p_1}{\alpha_1}$ e $\frac{p_1}{p_1-\alpha_1}$ e imersão de Sobolev temos

$$\int_\Omega v_n^{\alpha_1}u_n dx \leq C^{'}\|u_n\|_{1,\beta_1}\|v_n\|_{1,\beta_2}^{\alpha_1}.$$

Usando a condição (A_1) temos

$$\xi_0 \int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1} + H(\xi_3)\xi_2 \int_\Omega |\nabla u_n|^{q_1} \leq C' \left[\|u_n\|_{1,\beta_1} + \|u_n\|_{1,\beta_1} \|v_n\|_{1,\beta_2}^{\alpha_2} \right] \tag{2.6}$$

e

$$\xi_0 \int_\Omega |\nabla v_n|^{p_2} + H(\xi_3)\xi_2 \int_\Omega |\nabla v_n|^{q_2} \leq C' \left[\|v_n\|_{1,\beta_2} + \|u_n\|_{1,\beta_1} \|v_n\|_{1,\beta_2}^{\alpha_2} \right]. \tag{2.7}$$

Como $\alpha_1 \leq p_1 - 1$ e $\alpha_2 \leq p_2 - 1$ segue de (2.6) e (2.7) que $\|u_n\|_{1,\beta_1}, \|v_n\|_{1,\beta_2}$ são limitadas. Então, a menos de subsequência, temos

$$u_n \rightharpoonup u \text{ para algum } u \in W_0^{1,\beta_1}(\Omega),$$

$$u_n \to u \text{ em } L^s(\Omega), \text{ para todo } 1 \leq s < {\beta_1}^*,$$

$$v_n \rightharpoonup v \text{ para algum } v \in W_0^{1,\beta_2}(\Omega),$$

$$v_n \to v \text{ em } L^s(\Omega), \text{ para todo } 1 \leq s < {\beta_2}^*,$$

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \Omega,$$

$$v_n(x) \to v(x) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Como (u_n) e (v_n) são soluções do problema auxiliar temos

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}|\nabla u_n|\nabla\phi = \int_\Omega \frac{h_1(x)\phi}{(\frac{1}{n}+v_n)^{\gamma_1}} + \int_\Omega k_1(x){v_n}^{\alpha_1}\phi,\ \forall\ \phi \in W_0^{1,\beta_1}(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v_n|^{p_2})|\nabla v_n|^{p_2-2}|\nabla v_n|\nabla\varphi = \int_\Omega \frac{h_2(x)\varphi}{(\frac{1}{n}+u_n)^{\gamma_2}} + \int_\Omega k_2(x){u_n}^{\alpha_2}\varphi,\ \forall\ \varphi \in W_0^{1,\beta_2}(\Omega).$$

Observando que

$$\frac{h_1(x)\phi}{(\frac{1}{n}+v_n)^{\gamma}} \to \frac{h_1(x)\phi}{v^{\gamma}} \text{ q.t.p em } \Omega$$

e pela Proposição A.1 no Apêndice temos

$$\left|\frac{h_1(x)\phi}{(\frac{1}{n}+v_n)^{\gamma_1}}\right| \leq h_1(x)\left|\frac{\phi}{v_n^{\gamma}}\right| \leq \left|\frac{\phi}{Cd(x)^{\gamma}}\right| \in L^1(\Omega),$$

então segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \frac{h_1(x)\phi}{(\frac{1}{n}+v_n)^{\gamma_1}} \to \int_\Omega \frac{h_1(x)\phi}{v^{\gamma_1}}.$$

Também temos que

$$\int_\Omega k_1(x){u_n}^{\alpha_1}\varphi \to \int_\Omega k_1(x)u^{\alpha_1}\varphi.$$

Passando ao limite nas expressões acima segue-se as seguintes igualdades

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}|\nabla u|\nabla\phi = \int_\Omega \frac{h_1(x)\phi}{v^{\gamma_1}} + \int_\Omega k_1(x)v^{\alpha_1}\phi,\ \forall\ \phi \in W_0^{1,\beta_1}(\Omega),$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}|\nabla v|\nabla\varphi = \int_\Omega \frac{h_2(x)\varphi}{u^{\gamma_2}} + \int_\Omega k_2(x)u^{\alpha_2}\varphi,\ \forall\ \varphi \in W_0^{1,\beta_2}(\Omega).$$

Portanto, temos que (u,v) é uma solução fraca para o problema (P) o que conclui a demonstração. $\square$

Capítulo

3

Múltiplas Soluções Positivas Ordenadas para um Problema Elíptico Envolvendo o p&q-Laplaciano

Neste capítulo, estudaremos questões que envolvem existência, multiplicidade e positividade de solução para o seguinte problema:

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

com $1 < p < \infty$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, λ é um parâmetro real positivo, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1 e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que muda de sinal. Estas funções satisfazem as seguintes hipóteses listadas abaixo:

(f_1) $f(0) \geq 0$ e existem $0 < b_1 < c_1 < b_2 < \cdots < c_{m-1} < b_m$, zeros de f, tal que

$$\begin{cases} f \leq 0 \quad em \quad (b_k, c_k) \\ f \geq 0 \quad em \quad (c_k, b_{k+1}); \end{cases}$$

(f_2) $\displaystyle\int_{b_k}^{b_{k+1}} f(s)ds > 0,\ \forall\ k \in \{1, \ldots, m-1\}.$

$(\mathcal{K}_1)$ Existem constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_3 \geq 0$ e $1 < p < q < \infty$ tal que

$$\alpha_0 + H(\alpha_3)\alpha_1 t^{\frac{q-p}{p}} \leq a(t) \leq \alpha_2 + \alpha_3 t^{\frac{q-p}{p}}, \ \forall\, t \geq 0$$

onde $H : [0, +\infty) \to \{0, 1\}$ é a função dada por

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t > 0 \\ 0 & \text{se} \quad t = 0. \end{cases}$$

$(\mathcal{K}_2)$ Se $p \geq 2$, a aplicação $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $g(t) = a(t^p)t^{p-2}$ é não-decrescente e se $1 < p < 2$, a aplicação $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é não-decrescente.

Daremos abaixo o exemplo de uma função que satisfaz as hipóteses $(f_1) - (f_2)$.

Exemplo 3.1 $f(t) = (x-2)(x-4)(3-x)$.

Fazendo

$$\gamma = (1 - H(\alpha_3))p + H(\alpha_3)q$$

consideremos o espaço de Sobolev $X = W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\| = \|u\|_{1,p} + H(\alpha_3)\|u\|_{1,q}$$

onde $\|u\|_{1,r}^r = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^r dx$, para $r \geq 1$.

Definição 3.1 *Dizemos que $u \in X$ é uma solução fraca do problema (P_λ) se a seguinte igualdade for satisfeita*

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v = \lambda \int_\Omega f(u)v, \ \forall\, v \in X.$$

O principal resultado de existência e multiplicidade é dado pelo teorema descrito abaixo:

Teorema 3.1 *Suponhamos que as condições $(f_1) - (f_2)$ e $(\mathcal{K}_1) - (\mathcal{K}_2)$ sejam satisfeitas. Então, existe $\lambda^* > 0$, tal que para cada $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ o problema (P_λ) possui ao menos*

$(m-1)$ *soluções fracas* u_i *com*

$$u_i \in X \cap L^{\infty}(\Omega) \ \ e \ \ b_i < \|u_i\|_{\infty} \leq b_{i+1}, \ \forall \ i \in \{1, \ldots, m-1\}.$$

Quando $a \equiv 1$ e $p = 2$ os autores em [5] consideraram $f \in C^1, f(0) > 0$, estudaram uma equação diferencial ordinária autônoma e utilizaram método de sub e super solução. Já em [21] o autor estudou um problema N-dimensional considerando $f \in C^1, f(0) > 0$ fazendo uma combinação de método variacional e teoria do grau. Em [6] foi considerado $f \in C^1, f(0) \geq 0$, a condição (f_2) é necessária para mostrar a existência de solução e usaram método de sub e supersolução. Agora, o caso $a \neq 1$ sem a condição de área foi estudado para $p = 2$ por [22] e para $1 < p < N$ por [17] e [15].

Abordamos aqui o caso em que o operador considerado é do tipo $p\&q$-Laplaciano, f é uma função contínua com $f(0) \geq 0$ e a hipótese (f_2), conhecida como condição de área, é válida para mostrarmos multiplicidade de soluções para o problema (P_λ).

3.1 Resultados Preliminares

Para provar o Teorema 3.1 necessitamos dos seguintes resultados:

Lema 3.1 *Seja* $g \in C(\mathbb{R})$ *e* $s_0 > 0$ *tal que*

$$g(s) \geq 0 \ \ se \ \ s \in (-\infty, 0),$$

$$g(s) \leq 0 \ \ se \ \ s \in [s_0, \infty).$$

Se $u \in X$ *é uma solução fraca de*

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) & = & g(u) & em \quad \Omega, \\ u & = & 0 & em \quad \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Então $u \geq 0$ *q.t.p em* $\Omega, u \in L^{\infty}(\Omega)$ *e* $\|u\|_{\infty} \leq s_0$.

Demonstração. Seja $u \in X$ e consideremos $u^- = \max\{-u, 0\}$. Sabemos que $u^- \in X$ e

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_i} = \begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x_i} & \text{se} \quad u < 0, \\ 0 & \text{se} \quad u \geq 0. \end{cases}$$

Suponhamos que $u \in X$ seja uma solução fraca de (P), ou seja,

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v = \int_\Omega g(u)v, \ \forall \ v \in X.$$

Em particular, fazendo $v = u^- \in X$ obtemos

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u^- = \int_\Omega g(u)u^-,$$

ou seja,

$$\int_{u<0} a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p = \int_{u<0} g(u)u.$$

Então,

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u^-|^p \leq 0.$$

Da condição $(\mathcal{K}_1)$ segue-se que

$$0 < \alpha_0 \leq \alpha_0 + H(\alpha_3)\alpha_1 t^{\frac{q-p}{p}} \leq a(t), \ \forall \ t \geq 0$$

e daí

$$0 \leq \alpha_0 \int_\Omega |\nabla u^-|^p \ dx \leq \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u^-|^p \ dx \leq 0.$$

Logo,

$$\int_\Omega |\nabla u^-|^p = \|u^-\|_{1,p}^p \equiv 0,$$

mostrando que $u^- \equiv 0$. Portanto,

$$u \equiv u^+ \geq 0.$$

Fazendo $v = (u - s_0)^+ \in X$ obtemos

$$\frac{\partial (u-s_0)^+}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} & \text{se} \quad u > s_0, \\ 0 & \text{se} \quad u \leq s_0. \end{cases}$$

Tomando $v = (u - s_0)^+ \in X$ como função teste,

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla (u-s_0)^+ = \int_\Omega g(u)(u-s_0)^+.$$

Assim,

$$\int_{u>s_0} a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p = \int_{u>s_0} g(u)(u-s_0) \leq 0$$

o que implica

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla (u-s_0)^+|^p \leq 0.$$

Como $a(t) \geq \alpha_0 > 0$ temos

$$\int_\Omega |\nabla (u-s_0)^+|^p = \|(u-s_0)^+\|_{1,p}^p = 0.$$

Portanto, $(u-s_0)^+ \equiv 0$ e sendo $u - s_0 = (u-s_0)^+ - (u-s_0)^-$ temos $u \leq s_0$ q.t.p em Ω mostrando que $0 \leq \|u\|_\infty \leq s_0$. $\square$

Consideremos, para cada $k \in \{2, ..., m\}$, a função truncamento dada por

$$f_k(s) = \begin{cases} f(0) & \text{se} \quad s \leq 0, \\ f(s) & \text{se} \quad 0 \leq s \leq b_k, \\ 0 & \text{se} \quad s > b_k. \end{cases}$$

Para cada $\lambda > 0$ consideremos o funcional truncado $\Phi_{k,\lambda} : X \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi_{k,\lambda}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p) - \lambda \int_\Omega F_k(u)$$

onde $A(t) = \displaystyle\int_0^t a(s)ds$ e $F_k(t) = \displaystyle\int_0^t f_k(s)ds$ e $\Phi_{k,\lambda}$ é o funcional energia associado ao problema

$$(P_\lambda)_k \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) & = & \lambda f_k(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{array} \right.$$

e as soluções fracas de $(P_\lambda)_k$ são os pontos críticos do funcional $\Phi_{k,\lambda}$.

No que segue designaremos por $\mathbb{K}_{k,\lambda}$ o conjunto dos pontos críticos de $\Phi_{k,\lambda}(u)$.

O próximo Lema nos garante que solução fraca do problema truncado é também solução fraca do problema (P_λ).

Lema 3.2 *Temos que $u \in \mathbb{K}_{k,\lambda}$ se, e somente se, u é uma solução fraca não negativa do problema $(P_\lambda)_k$ e $u \in L^\infty(\Omega)$ com $\|u\|_\infty \leq b_k$. Consequentemente, u é uma solução fraca não negativa do problema (P_λ).*

Demonstração. Basta considerar $g(s) = f_k(s)$ no Lema 3.1 e observar que usando a definição da função truncamento temos

$$\left\{ \begin{array}{rcll} f_k(s) & = & f(0) & \text{se} \quad s \in (-\infty, 0), \\ f_k(s) & = & 0 & \text{se} \quad s \in (b_k, \infty). \end{array} \right.$$

Desde que u é solução fraca de $(P_\lambda)_k$ segue-se do Lema 3.1 que $u \in L^\infty$ e $\|u\|_\infty \leq b_k$. Assim, $0 \leq u \leq b_k$ e, portanto, temos $f_k(u) = f(u)$ mostrando que u é solução fraca não negativa de (P_λ).

3.2 Resultado de Existência e Multiplicidade

Lema 3.3 *Se $(\mathcal{K}_1)$ e $(\mathcal{K}_2)$ valem, então existe uma constante positiva c_p, tal que*

$$c_p|x-y|^p \leq \langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y\rangle, \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}^N, \tag{3.1}$$

quando $p \geq 2$, *e*

$$c_p \frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} \leq \langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y\rangle, \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^N, \tag{3.2}$$

quando $1 < p < 2$.

Demonstração. No Capítulo 1, mostramos a desigualdade para $p \geq 2$ resta-nos demonstrá-la para $1 < p < 2$. De fato, temos

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j =$$
$$\left(\sum_{i,j=1}^{N} z_j\xi_j\right)^2 |z|^{p-4}[(p-2)a(|z|^p) + pa'(|z|^p)|z|^p] + a(|z|^p)|z|^{p-2}|\xi|^2,$$

para todo $z, \xi \in \mathbb{R}^N$. De $(\mathcal{K}_2)$ e usando a desigualdade de Schwarz, obtemos

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j \geq$$
$$-(2-p)a(|z|^p)|z|^{p-2}|\xi|^2 + a(|z|^p)|z|^{p-2}|\xi|^2,$$

e daí,

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j \geq (p-1)a(|z|^p)|z|^{p-2}|\xi|^2,$$

para todo $z, \xi \in \mathbb{R}^N$. Escolhendo $\xi = x - y$ e $z = tx + (1-t)y = y + (1-t)x$ com $t \in (0,1)$ e usando $(\mathcal{K}_1)$, segue-se que

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j \geq c_p \frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, \tag{3.3}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$, onde $c_p = \alpha_0(p-1)$.

Por outro lado,

$$\sum_{i,j=1}^{N} (a(|x|^p)|x|^{p-2}x_j - a(|y|^p)|y|^{p-2}y_j)(x_j - y_j) = \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j, \tag{3.4}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$. De (3.3) e (3.4), concluímos a demonstração. $\square$

A proposição a seguir nos mostra a existência de solução para o problema (P_λ) na qual utilizamos o Princípio Variacional de Ekeland (ver Teorema A.5 no Apêndice), bem como, o Lema de Brezis-Lieb (ver apêndice Lema A.1).

Proposição 3.1 *O problema (P_λ) possui uma solução não-negativa para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. Desde que f_k é limitada temos

$$\begin{aligned}\Phi_{k,\lambda}(u) &= \tfrac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p) - \lambda \int_\Omega F_k(u) \\ &\geq \tfrac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p) - \lambda M_k \int_\Omega |u|.\end{aligned}$$

Segue-se da hipótese $(\mathcal{K}_1)$ que

$$\Phi_{k,\lambda}(u) \geq \frac{\alpha_0}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p + \frac{H(\alpha_3)\alpha_1}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q - \lambda M_k \int_\Omega |u|.$$

Sendo Ω um domínio limitado segue das imersões contínuas de Sobolev

$$\Phi_{k,\lambda}(u) \geq C_1(\|u\|_{1,p}^p + H(\alpha_3)\|u\|_{1,q}^q) - \lambda C_2 M_k \|u\|, \tag{3.5}$$

onde $C_1 = \min\left\{\frac{\alpha_0}{p}, \frac{\alpha_1}{q}\right\}$.

Demonstraremos a coercividade do funcional $\Phi_{k,\lambda}$. De fato, se $\|u\| \to +\infty$ devemos considerar os casos:

(i) $\|u\|_{1,p} \to +\infty$ e $\|u\|_{1,q} \to +\infty$;

(ii) $\|u\|_{1,p} \to +\infty$ e $\|u\|_{1,q}$ é limitada;

(iii) $\|u\|_{1,p}$ é limitada e $\|u\|_{1,q} \to +\infty$.

No caso (i), desde que $\|u\|_{1,q} \to +\infty$ temos $\|u\|_{1,q}^{q-p} \geq 1$, ou ainda, $\|u\|_{1,q}^q \geq \|u\|_{1,q}^p$.

Assim, considerando $\alpha_3 > 0$ de (3.5) temos

$$\begin{aligned}\Phi_{k,\lambda}(u) &\geq C'(\|u\|_{1,p}^p + \|u\|_{1,q}^p) - \lambda C_2 M_k \|u\| \\ &\geq (\|u\|_{1,p} + \|u\|_{1,q})^p - \lambda C_2 M_k \|u\|.\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\Phi_{k,\lambda}(u) \geq \|u\|^p - \lambda C_2 M_k \|u\|.$$

Desde que $p > 1$, $\Phi_{k,\lambda}(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$. Como Ω é um domínio limitado e $p < q$ então $\|u\|_{1,p} \leq C\|u\|_{1,q}$ mostrando que o item **(ii)** não pode ocorrer. Procedendo como no item **(i)** mostra-se **(iii)**. Isso mostra a coercividade do funcional. Consequentemente, o funcional $\Phi_{k,\lambda}$ é limitado inferiormente em X e, portanto, temos bem definido o seguinte número

$$\Phi_\infty^k := \inf_X \Phi_{k,\lambda}.$$

Como $\Phi_{k,\lambda}$ é de classe C^1, segue-se que $\Phi_{k,\lambda}$ é contínuo e, portanto, semi-contínuo inferiormente. Além disso, sendo $\Phi_{k,\lambda}$ limitado inferiormente podemos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland, ver apêndice Teorema A.5, no espaço métrico completo (X, d) com $d(u, v) = \|u - v\|$ para concluir que existe $(u_n) \subset X$ tal que

$$\Phi_{k,\lambda}(u_n) \to \Phi_\infty^k$$

e

$$\Phi'_{k,\lambda}(u_n) \to 0 \text{ em } X^*.$$

Observe que (u_n) é limitada em X, pois do contrário existiria uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $\|u_{n_j}\| \to +\infty$. Então, usando a coercividade de $\Phi_{k,\lambda}$ teríamos $\Phi_{k,\lambda}(u_{n_j}) \to +\infty$ o que contradiz $\Phi_{k,\lambda}(u_{n_j}) \to \Phi_\infty^k$.

Sendo X um espaço de Banach reflexivo, a menos de subsequência, temos

$$u_n \rightharpoonup u_{k,\lambda} \text{ em } X. \tag{3.6}$$

Usando a imersão compacta de Sobolev,

$$u_n \to u_{k,\lambda} \text{ em } L^s(\Omega), 1 \leq s < \gamma^*. \tag{3.7}$$

e, portanto,

$$u_n(x) \to u_{k,\lambda}(x) \text{ q.t.p em } \Omega. \tag{3.8}$$

Afirmação 3.1 $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \to \dfrac{\partial u_{k,\lambda}}{\partial x_i}(x)$ *q.t.p em* Ω *para todo* $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Demonstração. Usando o Lema 3.3 com $x = \nabla u_n$ e $y = \nabla u_{k,\lambda}$ existe $c_p > 0$ de modo que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left\langle a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u_{k,\lambda}|^p)|\nabla u_{k,\lambda}|^{p-2}\nabla u_{k,\lambda}, \nabla u_n - \nabla u_{k,\lambda} \right\rangle \\ \geq \;& c_p \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_{k,\lambda}|^p. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Segue da convergência fraca em (3.6) que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p - \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_{k,\lambda} + o_n(1) \\ \geq \;& c_p \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_{k,\lambda}|^p \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $o_n(1) = \displaystyle\int_\Omega a(|\nabla u_{k,\lambda}|^p)|\nabla u_{k,\lambda}|^{p-2}\nabla u_{k,\lambda}\nabla(u_n - u_{k,\lambda})\, dx$.

Da convergência (3.7), a menos de subsequência, existe $h \in L^s(\Omega)$ tal que

$$|u_n(x)| \leq h(x) \;\text{ q.t.p em }\; \Omega$$

e

$$u_n(x) \to u_{k,\lambda}(x) \;\text{ q.t.p em }\; \Omega.$$

Da continuidade da função f_k

$$f_k(u_n(x))u_n(x) - f_k(u_n(x))u_{k,\lambda}(x) \to f_k(u_{k,\lambda}(x))u_{k,\lambda}(x) - f_k(u_{k,\lambda}(x))u_{k,\lambda}(x)$$

ou seja,

$$f_k(u_n(x))u_n(x) - f_k(u_n(x))u_{k,\lambda}(x) \to 0.$$

Note que

$$\begin{aligned} |f_k(u_n(x))u_n(x) - f_k(u_n(x))u_{k,\lambda}(x)| &\leq |f_k(u_n(x))u_n(x)| + |f_k(u_n(x))u_{k,\lambda}(x)| \\ &\leq |f_k(u_n(x))||u_n(x)| + |f_k(u_n(x))||u_{k,\lambda}(x)| \\ &\leq C|u_n(x)| + C|u_{k,\lambda}(x)|. \end{aligned}$$

Como $|u_n(x)| \leq h(x)$, segue-se que

$$|f_k(u_n(x))u_n(x) - f_k(u_n(x))u_{k,\lambda}(x)| \leq Ch(x) + C|u_{k,\lambda}(x)| \in L^1(\Omega).$$

Deste modo, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e concluir que

$$\int_\Omega (f_k(u_n(x))u_n(x) - f_k(u_n(x))u_{k,\lambda}(x)) \to \int_\Omega (f_k(u_{k,\lambda}(x))u_{k,\lambda}(x) - f_k(u_{k,\lambda}(x))u_{k,\lambda}(x)) = 0$$

isto é,

$$\int_\Omega f_k(u_n)u_n - \int_\Omega f_k(u_n)u_{k,\lambda} = o_n(1).$$

Assim,

$$\lambda \int_\Omega f_k(u_n)u_n - \lambda \int_\Omega f_k(u_n)u_{k,\lambda} = o_n(1). \tag{3.11}$$

Então, de (3.9) e (3.11)

$$0 \leq c_p \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_{k,\lambda}|^p \leq \Phi'_{k,\lambda}(u_n)u_n - \Phi'_{k,\lambda}(u_n)u_{k,\lambda} = o_n(1), \tag{3.12}$$

visto que (u_n) é limitada e é uma sequência $(PS)_{\Phi^k_\infty}$. Consequentemente,

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \to \frac{\partial u_{k,\lambda}}{\partial x_i}(x) \text{ em } L^p(\Omega)$$

mostrando que $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \to \dfrac{\partial u_{k,\lambda}}{\partial x_i}(x)$ q.t.p em Ω para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$ concluindo, assim, a demonstração da afirmação.

Afirmação 3.2 *$u_{k,\lambda}$ é um ponto de mínimo global para o funcional $\Phi_{k,\lambda}$ em X.*

Demonstração. Segue-se da continuidade da função a e da Afirmação 3.1 que

$$a(|\nabla u_n(x)|^p)|\nabla u_n(x)|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \to a(|\nabla u_{k,\lambda}(x)|^p)|\nabla u_{k,\lambda}(x)|^{p-2}\frac{\partial u_{k,\lambda}}{\partial x_i}(x) \tag{3.13}$$

q.t.p em Ω. Por outro lado, da hipótese $(\mathcal{K}_1)$

$$\begin{aligned}\left|a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| &\leq \alpha_2|\nabla u_n|^{p-2}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| + \alpha_3|\nabla u_n|^{q-2}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| \\ &\leq \alpha_2|\nabla u_n|^{p-1} + \alpha_3|\nabla u_n|^{q-1}.\end{aligned}$$

Se $\alpha_3 = 0$ tem-se $\gamma = p$ e assim

$$\int_\Omega \left|a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{\frac{p}{p-1}} \leq \alpha_2 \int_\Omega |\nabla u_n|^p \leq K,$$

pois nesse caso, $\|u_n\|^p = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^p$ e (u_n) é limitada em X. Se $\alpha_3 > 0$, então $\gamma = q$ e assim

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{\frac{q}{q-1}} &\leq \int_\Omega \left[\alpha_2|\nabla u_n|^{p-1} + \alpha_3|\nabla u_n|^{q-1}\right]^{\frac{q}{q-1}} \\ &\leq K_1\int_\Omega |\nabla u_n|^{\frac{q(p-1)}{q-1}} + K_2\int_\Omega |\nabla u_n|^q \\ &\leq K_1|\Omega|^{\frac{q-p}{q-1}}\|u_n\|_{1,q}^{\frac{q(p-1)}{q-1}} + K_2\|u_n\|_{1,q}^q \\ &\leq K_1|\Omega|^{\frac{q-p}{q-1}}K^{\frac{q(p-1)}{q-1}} + K_2K^q,\end{aligned}$$

pois (u_n) é limitada em X e $\|u_n\| = \|u_n\|_{1,p} + \|u_n\|_{1,q}$. Isto nos mostra que

$$\int_\Omega \left|a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \leq C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Sendo $\gamma > 1$ e $\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} = 1$ podemos usar o Lema de Brézis-Lieb (ver Lema A.1 no Apêndice) para concluir que

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}h \to \int_\Omega a(|\nabla u_{k,\lambda}|^p)|\nabla u_{k,\lambda}|^{p-2}\frac{\partial u_{k,\lambda}}{\partial x_i}h,\ \forall\ h \in L^\gamma(\Omega)$$

e então,

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_i} \to \int_\Omega a(|\nabla u_{k,\lambda}|^p)|\nabla u_{k,\lambda}|^{p-2}\frac{\partial u_{k,\lambda}}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_i},\ \forall\ h \in X.$$

ou seja,

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla h \to \int_\Omega a(|\nabla u_{k,\lambda}|^p)|\nabla u_{k,\lambda}|^{p-2}\nabla u_{k,\lambda}\nabla h,\ \forall\ h \in X. \tag{3.14}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos a convergência

$$\lambda\int_\Omega f(u_n)h \to \lambda\int_\Omega f(u_{k,\lambda})h,\ \forall\ h \in X. \tag{3.15}$$

Como

$$\Phi'_{k,\lambda}(u_n)h = o_n(1),\ \forall\ h \in X,$$

e

$$\Phi'_{k,\lambda}(u_n)h = \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla h - \lambda\int_\Omega f(u_n)h$$

fazendo $n \to \infty$ segue de (3.14) e (3.15) que

$$\int_\Omega a(|\nabla u_{k,\lambda}|^p)|\nabla u_{k,\lambda}|^{p-2}\nabla u_{k,\lambda}\nabla h - \lambda\int_\Omega f(u_{k,\lambda})h = 0$$

o que mostra que $\Phi'_{k,\lambda}(u_{k,\lambda})h = 0$ para todo $h \in X$. Consequentemente, usando o Lema 3.2 $u_{k,\lambda} \in X$ é uma solução fraca do problema (P_λ). $\square$

Nosso resultado de multiplicidade é dado pelo seguinte Teorema:

Teorema 3.2 *Para cada $k \in \{2, \ldots, m\}$ existe $\lambda_k > 0$ tal que para todo $\lambda > \lambda_k$ temos*

$$u_{k,\lambda} \notin \mathbb{K}_{k-1,\lambda}, \tag{3.16}$$

onde

$$\Phi_{k,\lambda}(u_{k,\lambda}) = \min_{v\in X}\Phi_{k,\lambda}(v). \tag{3.17}$$

Demonstração. Mostraremos que existe $\lambda_k > 0$ e $w \in X$, com $w \geq 0$ e $\|\omega\|_\infty \leq a_k$ tal que

$$\Phi_{k,\lambda}(\omega) < \Phi_{k-1,\lambda}(u_{k-1,\lambda}),\ \forall\ \lambda > \lambda_k \tag{3.18}$$

e daí

$$\Phi_{k,\lambda}(u_{k,\lambda}) < \Phi_{k-1,\lambda}(u_{k-1,\lambda}),\ \forall\ \lambda > \lambda_k. \tag{3.19}$$

Isto nos permite afirmar, pelo Lema 3.2, que $u_{k,\lambda}$ e $u_{k-1,\lambda}$ são duas soluções distintas de (P_λ). Observemos que de (3.19) temos

$$b_{k-1} < \|u_{k,\lambda}\|_\infty \leq b_k. \tag{3.20}$$

Com efeito, se fosse

$$0 \leq u_{k,\lambda} \leq b_{k-1} \tag{3.21}$$

pela definição de F_k e da função truncamento observando a desigualdade (3.21) teríamos

$$\Phi_{k-1,\lambda}(u_{k-1,\lambda}) \leq \Phi_{k-1,\lambda}(u_{k,\lambda}) = \Phi_{k,\lambda}(u_{k,\lambda}) \tag{3.22}$$

contradizendo (3.19) e portanto (3.20) ocorre.

Provaremos agora a existência de w verificando (3.18). Temos da hipótese (f_2) que

$$\begin{aligned} 0 < \alpha &:= F(b_k) - \max_{0\leq s\leq b_{k-1}} F(s) \\ &= F(b_k) - F(b_{k-1}) \\ &= \int_{b_{k-1}}^{b_k} f(s)ds, \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(r)dr$. Assim, para todo $0 \leq u(x) \leq b_{k-1}$ q.t.p em Ω temos

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\Omega F(u) &= \textstyle\int_\Omega F(b_k) - \left[\int_\Omega F(b_k) - \int_\Omega F(u)\right] \\ &\leq \textstyle\int_\Omega F(b_k) - \int_\Omega \alpha \\ &= \textstyle\int_\Omega F(b_k) - \alpha|\Omega|. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Seja $\delta > 0$ e consideremos o conjunto aberto

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) < \delta\}. \tag{3.25}$$

Tomemos $\omega_\delta \in C_c^\infty(\Omega)$ com $0 \leq \omega_\delta \leq b_k$ e $\omega_\delta \equiv b_k$ sobre $\Omega \setminus \Omega_\delta$. Assim,

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\Omega F(\omega_\delta) &= \textstyle\int_{\Omega\setminus\Omega_\delta} F(b_k) - \int_{\Omega_\delta} F(\omega_\delta) \\ &= \textstyle\int_\Omega F(b_k) - \int_{\Omega_\delta}[F(b_k) + F(\omega_\delta)] \\ &\geq \textstyle\int_\Omega F(b_k) - 2C|\Omega_\delta|, \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde $C = \max\limits_{0\leq s\leq b_k} |F(s)|$. Consequentemente, para todo $u \in X$ com $0 \leq u \leq b_{k-1}$ temos de (3.24) que

$$\int_\Omega F(b_k) \geq \int_\Omega F(u) + \alpha|\Omega|$$

e assim

$$\int_\Omega F(\omega_\delta) \geq \int_\Omega F(u) + \alpha|\Omega| - 2C|\Omega_\delta|. \tag{3.27}$$

Escolhendo $\overline{\delta} > 0$ de modo que

$$\eta = \alpha|\Omega| - 2C|\Omega_{\overline{\delta}}| > 0$$

teremos de (3.27)

$$\begin{aligned} \Phi_{k,\lambda}(\omega_{\bar\delta}) - \Phi_{k-1,\lambda}(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega [A(|\nabla\omega_{\bar\delta}|^p) - A(|\nabla u|^p)] - \lambda\int_\Omega [F(\omega_{\bar\delta}) - F(u)] \\ &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla\omega_{\bar\delta}|^p) - \lambda\eta. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Isto mostra que para $\omega = \omega_{\bar\delta}$ e $\lambda > 0$ suficientemente grande temos

$$\Phi_{k,\lambda}(\omega) < \Phi_{k-1,\lambda}(u_{k-1,\lambda})$$

provando assim o teorema. □

3.3 Condição (f_2) é necessária

Nesta seção, mostraremos que a condição (f_2) é necessária para a existência de solução fraca $u \in X \cap L^\infty(\Omega)$ com $\|u\|_\infty \in [b_k, b_{k+1})$. Para este fim, utilizaremos argumentos semelhantes aos encontrados em [26]. Consideraremos somente o caso $\lambda = k = 1$, pois os demais seguem-se de maneira similar. Além disso, vamos assumir a princípio que $f(0) > 0$.

Observação 3.1 *Como a função a satisfaz a condição* $(\mathcal{K}_1)$ *e* f *a condição* (f_1)*, podemos utilizar o Teorema 1 em [24] e concluir que as soluções fracas em* $L^\infty(\Omega)$ *são de classe* $C^1(\Omega)$.

Lema 3.4 *Seja* $u \in C^1(\Omega)$ *uma solução fraca não negativa do problema* (P_λ)*. Se* $f(0) > 0$*, então* u *é positiva em* Ω.

Demonstração. Suponhamos por contradição que exista x_0 tal que

$$u(x_0) = 0.$$

Consideremos $y_0 \in \Omega$, $B_r(y_0) \subset \Omega$ com $x_0 \in \partial B_r(y_0)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, estritamente decrescente em $[0, \infty)$, tal que $g(0) = f(0) > 0$ e

$$\gamma := g\left(\frac{b_1}{2}\right) = \inf_{0 \le s \le \frac{b_1}{2}} g(s) > 0.$$

Definamos agora a função $b : B_r(y_0) \to \mathbb{R}$ por

$$b(x) := \epsilon \left[e^{-|\frac{x-y_0}{r}|^2} - e^{-1}\right] \tag{3.29}$$

onde $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno tal que

$$\sup_{B_r(y_0)} |div(a(|\nabla b|^p)|\nabla b|^{p-2}\nabla b)| \le \gamma. \tag{3.30}$$

Deste modo, a função b é uma subsolução do problema

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = g(v) & \text{em} \quad B_r(y_0), \\ v = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_r(y_0) \end{cases} \tag{3.31}$$

e assim, para todo $\varphi \ge 0$ em X, obtemos

$$\int_{B_r(y_0)} \left(a(|\nabla b|^p)|\nabla b|^{p-2}\nabla b - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) \nabla\varphi \le \int_{B_r(y_0)} [g(b) - g(u)]\varphi. \tag{3.32}$$

Consideremos $B_r(y_0)^+ = \{x \in B_r(y_0); b(x) > u(x)\}$. Em vista do Lema 3.3 e fazendo $\varphi = (b-u)^+$, temos

$$0 \leq \int_{B_r(y_0)^+} \left(a(|\nabla b|^p)|\nabla b|^{p-2}\nabla b - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)(\nabla b - \nabla u).$$

Desde que a função g é decrescente então $g(b) - g(u) \leq 0$ e assim,

$$\int_{B_r(y_0)^+} [g(b) - g(u)](b-u) \leq 0.$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{B_r(y_0)^+} \left(a(|\nabla b|^p)|\nabla b|^{p-2}\nabla b - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)(\nabla b - \nabla u) \\ &\leq \int_{B_r(y_0)^+} [g(b) - g(u)](b-u) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

mostrando que $B_r(y_0)^+ = \emptyset$ e, portanto, $u(x) \geq b(x)$ em $B_r(y_0)$. Como $u(x_0) = b(x_0) = 0$ e $b > 0$ em $B_r(y_0)$ segue da definição de derivada normal exterior

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial \eta}(x_0) = \lim_{t\to 0^-} \frac{b(x_0+t\eta) - b(x_0)}{t} &= \lim_{t\to 0^-} \frac{b(x_0+t\eta)}{t} \\ &\geq \lim_{t\to 0^-} \frac{u(x_0+t\eta)}{t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \leq \frac{\partial b}{\partial \eta}(x_0) < 0$$

implicando que $|\nabla u(x_0)| \neq 0$ o que contradiz o fato de $u(x_0) = 0$ ser um valor mínimo de u em Ω.

Vamos agora considerar B a bola aberta com centro $0 \in \mathbb{R}^N$ e $\Omega \subset B$. Definamos a função

$$\alpha(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad x \in \overline{\Omega}, \\ 0 & \text{se} \quad x \in \overline{B} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Sendo Ω um domínio limitado temos

$$\alpha \in X(B) := W_0^{1,\gamma}(B).$$

Lema 3.5 *α é uma subsolução do problema*

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla v) &= f(v) \quad em \quad B, \\ v &= 0 \quad sobre \quad \partial B. \end{cases} \tag{3.33}$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$v_n(x) = n \min\left\{u(x), \frac{1}{n}\right\}, x \in \Omega$$

onde u é como no lema anterior. Pela definição de v_n segue-se que

$$v_n(x) = \begin{cases} nu(x), & u(x) < \frac{1}{n}, \\ 1, & u(x) \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

e assim, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial v_n}{\partial x_i} \geq 0$, ou seja, $\nabla u \nabla v_n \geq 0$.

Consideremos a função $\omega \in C_c^\infty(\Omega), \omega \geq 0$. Então $\omega v_n \in X$ e sendo u uma solução fraca de (P_λ)

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(\omega v_n) = \int_\Omega f(u)\omega v_n$$

ou ainda,

$$\int_\Omega \omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v_n + \int_\Omega v_n a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \omega = \int_\Omega f(u)\omega v_n. \tag{3.34}$$

Como $0 \leq v_n \leq 1$ e $v_n \to 1$ q.t.p em Ω, segue-se do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e de (3.34) que

$$
\begin{aligned}
\int_B a(|\nabla\alpha|^p)|\nabla\alpha|^{p-2}\nabla\alpha\nabla\omega &= \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\omega \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega v_n a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\omega \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\int_\Omega f(u)\omega v_n - \int_\Omega \omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v_n\right) \\
&\leq \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f(u)\omega v_n \\
&= \int_\Omega f(u)\omega \leq \int_B f(\alpha)\omega
\end{aligned}
$$

onde na última desigualdade usamos o fato de $f(0) > 0$ provando assim o lema. $\square$

Teorema 3.3 *Suponhamos que $f(0) > 0$. Se (P_λ) possui uma solução fraca não negativa $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\|u\|_\infty \in (b_1, b_2]$, então*

$$\int_{b_1}^{b_2} f(s)ds > 0. \tag{3.35}$$

Demonstração. Seja $\beta(x) = b_2,\ \forall\ x \in B$. Assim,

$$
\begin{cases}
-div(a(|\nabla\beta|^p)|\nabla\beta|^{p-2}\nabla\beta) = f(\beta) & \text{em} \quad B, \\
\beta > 0 & \text{sobre} \quad \partial B,
\end{cases} \tag{3.36}
$$

assim β é uma supersolução de (3.33). Como α é uma subsolução de (3.33) então $\alpha \leq \beta$ e usando o fato que $\|u\|_\infty \in (b_1, b_2]$, temos uma solução maximal $\overline{u}$ em $[\alpha, \beta]$. Para cada solução v de (3.33) com

$$\alpha(x) \leq v(x) \leq \beta(x),$$

temos $v \leq \overline{u}$. Este fato, nos permite afirmar que $\overline{u}$ é radialmente simétrica. De fato, suponha por contradição que $x_1, x_2 \in B$ com $|x_1| = |x_2|$ e $\overline{u}(x_1) < \overline{u}(x_2)$. Seja A uma matrix ortogonal $N \times N$ tal que $x_2 = Ax_1$ e considere $\widetilde{u}(x) = \overline{u}(Ax)$. Então,

$$\nabla\widetilde{u}(x) = A^T\nabla\overline{u}(Ax),\ \forall\ x \in B.$$

Sendo $x \mapsto Ax$ uma isometria, temos

$$|\nabla \widetilde{u}(x)| = |A^T \nabla \overline{u}(Ax)| = |\nabla \overline{u}(Ax)|.$$

Mostraremos agora que $\widetilde{u}$ é uma solução fraca de (3.33) e para isto provaremos a igualdade

$$\int_B a(|\nabla \widetilde{u}|^p)|\nabla \widetilde{u}|^{p-2}\nabla \widetilde{u}\nabla h = \int_B f(\widetilde{u})h, \ \forall \ h \in X(B).$$

Fazendo $\psi(x) = h(A^T x) \in X(B)$, usando a definição de $\widetilde{u}$ dada acima e fazendo a mudança de variável $y = Ax$ temos

$$\begin{aligned}
& \int_B a(|\nabla \widetilde{u}|^p)|\nabla \widetilde{u}|^{p-2}\nabla \widetilde{u}\nabla h dx \\
= & \int_B a(|\nabla \overline{u}(Ax)|^p)|\nabla \overline{u}(Ax)|^{p-2} A^T \nabla \overline{u}(Ax) \left(A^T \nabla \psi(Ax)\right) dx \\
= & \int_B a(|\nabla \overline{u}(y)|^p)|\nabla \overline{u}(y)|^{p-2}\nabla \overline{u}(y)\nabla \psi(y)|\det A| dy \\
= & \int_B f(\overline{u}(y))\psi(y) dy \\
= & \int_B f(\overline{u}(AA^T y))\psi(AA^T y) dy \\
= & \int_B f(\overline{u}(Ax))\psi(Ax)|\det A^T| dx \\
= & \int_B f(\widetilde{u}(x))h(x) dx,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. Sendo α e $\widetilde{u}$ duas soluções resultantes o problema (3.33) admite outra solução $\widehat{u}$ tal que

$$\max\{\alpha, \widetilde{u}\} \leq \widehat{u} \leq \beta. \tag{3.37}$$

Desde que, $\overline{u}$ é solução maximal em (α, β), concluímos de (3.37) que

$$\overline{u}(x_1) \geq \widehat{u}(x_1) \geq \widetilde{u}(x_1) = \overline{u}(x_2) > \overline{u}(x_1),$$

o que é uma contradição. Então, $\overline{u}$ é radialmente simétrica.

Vamos agora considerar a função $u : [0, R) \to \mathbb{R}^+$ de classe C^1 dada por $u(r) = u(|x|) = \overline{u}(x)$. Como

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

então temos

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{-1/2}(2x_i) = \frac{x_i}{|x|} = \frac{x_i}{r}.$$

Sendo $u(r) = \overline{u}(x)$ então

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = u'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = u'(r)\frac{x_i}{r}$$

e

$$|\nabla \overline{u}| = |u'|.$$

Para cada $v \in C_0^\infty(0, R)$ façamos

$$w(r) = \frac{v(r)}{r^{N-1}}, r \in (0, R) \text{ and } w(0) = 0,$$

e definamos $\overline{v}(x) = v(|x|)$ e $\overline{w}(x) = w(|x|)$. Sendo $\overline{u}$ é uma solução fraca de (3.33) temos

$$\int_B a(|\nabla \overline{u}|^p)|\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u}\nabla \overline{w}dx = \int_B f(\overline{u})\overline{w}dx.$$

Desde que

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial x_i} = w'\frac{x_i}{r} \text{ e } |\nabla \overline{w}| = |w'|$$

então integrando de 0 a R temos

$$\int_0^R a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u'w'r^{N-1}dr = \int_0^R f(u)wr^{N-1}dr.$$

Substituindo $w = \frac{1}{r^{N-1}}v$ e $w' = \frac{1}{r^{N-1}}v' - \frac{(N-1)}{r^N}v$ na igualdade anterior temos

$$\int_0^R a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u'\left(\frac{1}{r^{N-1}}v' - \frac{(N-1)}{r^N}v\right)r^{N-1}dr = \int_0^R f(u)\frac{1}{r^{N-1}}vr^{N-1}dr.$$

Assim,

$$\int_0^R a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u'v'dr - \int_0^R \frac{(N-1)}{r} a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u'vdr = \int_0^R f(u)vdr,$$

para todo $v \in C_0^\infty(0,R)$ o que mostra que u é uma solução fraca de classe $C^1(0,R)$ da equação

$$-\partial\left(a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u'\right) = \frac{N-1}{r} a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u' + f(u). \tag{3.38}$$

Desde que a e f são funções contínuas temos que o lado direito da igualdade acima é contínuo e, portanto, a derivada distribucional denotada por ∂ é uma derivada clássica e u é uma solução clássica de (3.38). Como $\overline{u}$ é radialmente simétrica temos $u'(0) = 0$ e então u é uma solução clássica de (3.38) e verifica $u'(0) = 0 = u(R)$. Seja $r_0 \in [0,R)$ tal que

$$u(r_0) = \max\{u(r) : r \in [0,R)\}.$$

Multiplicando (3.38) por u' e integrando temos

$$\int_{r_0}^r -(a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u')'u' = \int_{r_0}^r \frac{N-1}{r} a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u'u' + \int_{r_0}^r f(u)u'.$$

Assim

$$\begin{aligned} - & \int_{r_0}^r \left([a(|u'|^p)]'|u'|^{p-2}u' + (|u'|^{p-2}u')'a(|u'|^p)\right)u' \\ = & \ (N-1)\int_{r_0}^r a(|u'|^p)\frac{|u'|^p}{r} + \int_{r_0}^r f(u)u', \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} & -\left((p-1)\int_{r_0}^r a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u'u''dt + p\int_{r_0}^r a'(|u'|^p)|u'|^{2p-2}u'u''dt\right) \\ & - \ (N-1)\int_{r_0}^r a(|u'|^p)\frac{|u'|^p}{t}dt \\ & = \int_{r_0}^r f(u)u'dt, \end{aligned}$$

para todo $r \in (0,R)$. Sendo $u(r_0) > b_1$ podemos escolher $r \in (0,R)$ tal que $u(r) = b_1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{u(r_0)}^{b_1} f(t)dt &= -\int_0^{u'(r)} \left[(p-1)a(|t|^p) + pa'(|t|^p)|t|^p\right]|t|^{p-2}tdt \\
&- (N-1)\int_{r_0}^{r} a(|u'|^p)\frac{|u'|^p}{t}dt.
\end{aligned}$$

Segue da hipótese $(\mathcal{K}_2)$

$$\begin{aligned}
(a'(t^p)t^{p-2})' &\geq 0 \\
a'(t^p)pt^{2p-3} + (p-2)t^{p-3}a(t^p) &\geq 0 \\
t^{p-3}(a'(t^p)pt^p + (p-2)a(t^p)) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Desde que $t \geq 0$ então da desigualdade acima temos

$$a'(t^p)pt^p + (p-2)a(t^p) \geq 0, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Assim, como

$$-(N-1)\int_{r_0}^{r} a(|u'|^p)\frac{|u'|^p}{t}dt < 0$$

então

$$\int_{b_1}^{u(r_0)} f(t)dt > 0.$$

Sendo $f \leq 0$ em $(b_1, c_1]$ então $u(r_0) \in (c_1, b_2]$ e f é não negativa em $[u(r_0), b_2]$. Portanto,

$$\int_{b_1}^{b_2} f(s)ds \geq \int_{b_1}^{u(r_0)} f(s)ds > 0.$$

$\square$

Observação 3.2 *A condição $f(0) > 0$ no Teorema anterior pode ser removida. De fato, suponhamos que $f(0) \leq 0$ e $u \in X \cap L^\infty(\Omega)$ é uma solução não negativa de (P_λ) de modo que $\|u\|_\infty \in (b_1, b_2]$. Definamos uma função contínua $\widehat{f}$ tal que $\widehat{f}(0) > 0$, $\widehat{f} \geq f$ em $[0, b_1]$ e*

$\widehat{f} = f$ *em* $[b_1, \infty)$. *Então* u *é uma subsolução de*

$$\begin{cases} -div\ (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) & = & \widehat{f}(u) & em & \Omega, \\ u & = & 0 & sobre & \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando novamente $\beta(x) = b_2$ *como supersolução temos uma solução* $\widetilde{u}$ *verificando* $u \leq \widetilde{u} \leq b_2$. *Procedendo como na primeira parte da demonstração com* $\widehat{f}$ *no lugar de* f *obtemos*

$$\int_{b_1}^{b_2} f(s)ds = \int_{b_1}^{b_2} \widehat{f}(s)ds > 0.$$

Apêndice

$\mathcal{A}$

APÊNDICE

Neste apêndice, enunciaremos alguns resultados importantes utilizados ao longo do nosso trabalho.

Teorema A.1 *(Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue) Seja* (f_n) *uma sequência de funções integráveis que convergem em quase todo ponto para função mensurável* f. *Se existe uma função integrável* g *tal que*

$$|f_n| \leq g \ \forall \ n \in \mathbb{N}$$

então f *é integrável e*

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [4].

Teorema A.2 *(Desigualdade de Hölder) Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^p(\Omega)$, *onde* $1 \leq p < +\infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então,*

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ e } |fg|_1 \leq |f|_p |g|_q.$$

Demonstração. Ver [4].

Teorema A.3 *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo. Se* (x_n) *é uma sequência limitada em* X, *então existem uma subsequência* $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ *e* $x \in X$ *tais que*

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{em } X.$$

Demonstração. Ver [4].

Teorema A.4 *Sejam* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$, *tais que*

$$f_n \to f \ em \ L^p(\Omega).$$

Então, a menos de subsequência,

(1) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω

(2) $|f_n(x)| \leq g(x)$ *q.t.p em* Ω, *onde* $g \in L^p(\Omega)$.

Demonstração. Ver [4].

Lema A.1 *(Brezis e Lieb) Seja* Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^N$ *e* $(f_n) \subset L^p(\Omega), f \in L^p(\Omega)$ *com* $p > 1$. *Suponha que* $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω *e que existe* $C > 0$, *tal que*

$$\int_\Omega |f_n|^p dx \leq C, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\int_\Omega f_n \varphi dx \ \longrightarrow \ \int_\Omega f \varphi dx, \ \ \forall \ \varphi \in L^q(\Omega),$$

onde, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração. Ver [4].

Teorema A.5 *(Princípio Variacional de Ekeland) Seja* V *um espaço de Banach,* $F : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *uma função Gateaux diferenciável, semicontínua inferiormente e limitada inferiormente, tal que*

$$-\infty < inf F < +\infty.$$

Então, para todo $\epsilon > 0$, *para todo* $u \in V$ *tal que* $F(u) \leq inf F + \epsilon$, *para todo* $\lambda > 0$, *existe* $v \in V$ *tal que*

$$F(v) \leq F(u), \|v - u\| < \lambda \ e \ \|F'(v)\|_* \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Demonstração. Ver [16].

Teorema A.6 *(Minty-Browder) Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $A : E \to E^*$ uma aplicação não-linear contínua tal que*

$$\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle > 0, \ \forall \ v_1, v_2 \in E, v_1 \neq v_2$$

e

$$\lim_{\|v\| \to +\infty} \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|} = +\infty.$$

Então para todo $f \in E^*$ existe uma única solução $u \in E$ da equação $Au = f$.

Demonstração. Ver [4].

Proposição A.1 *(Desigualdade de Hardy- Sobolev) Sejam Ω um conjunto aberto limitado de classe C^1 e $1 < p < \infty$. Seja $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$ então existe uma constante C tal que*

$$\left| \frac{u}{d} \right|_p \leq C |\nabla u|_p, \quad \forall \ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [4].

Bibliografia

[1] C.O. Alves & F.J.S.A. Corrêa, *On the existence of positive solution for a class of singular systems involving quasilinear operators*, Applied Mathematics and Computation, 185 (2007) 727-736.

[2] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa & J. V. A. Gonçalves, *Existence of solutions for some classes of singular Hamiltonian systems*, Advanced Nonlinear Studies 5 (2005) 265-278.

[3] R.P. Agarwal, D. O' Regan, *Existence theory for single and multiple solutions to singular positive boundary value problems*, J. Diff. Equat. 175 (2001) 393-414.

[4] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[5] K.J. Brown & H. Budin, *On the existence of positive solutions for a class of semilinear elliptic boundary value problems*, SIAM J. Math. Anal. 10 (1979), N. 5, 875-883.

[6] P. Clément & G. Sweers, *Existence and multiplicity results for a semilinear eigenvalue problem*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (4) 14, N. 1, (1987) 97-121.

[7] F.J.S.A. Corrêa, A. S. S. Corrêa & J.R. Santos Júnior, *Multiple Ordered Positive Solutions of an Elliptic Problem Involving the p&q-Laplacian.* To appear in Journal of Convex Analysis.

[8] F.J.S.A. Corrêa, A. S. S. Corrêa & G. M. Figueiredo, *Positive solution for a class of p&q-singular elliptic equation.* To appear in Nonlinear Analysis: Real Worlds Applications.

[9] M.G. Crandall, P.H. Rabinowitz & L. Tartar, *On a Dirichlet problem with singular nonlinearity*, Comm. Partial Diff. Equat. 2 (1977) 193-222.

[10] E.N. Dancer & K. Schmitt, *On positive solutions of semilinear elliptic equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 101 (1987) 445-452.

[11] E.N. Dancer & S. Yan, *Construction of various types of solutions for an elliptic problem*, Calculus of Variations 20 (2004) 93-118.

[12] D.G. de Figueiredo, *On the uniqueness of positive solutions of the Dirichlet problem for* $-\Delta u = \lambda \sin u$, Nonlinear P.D.E. and Applications, Collège de France Seminar, Vol. 7, Pitman (1984) 80-83.

[13] D.G. de Figueiredo, *On the existence of multiple ordered solutions of nonlinear eigenvalue problems*, Nonlinear Analysis T.M.A. 11 (1987), N.4, 481-492.

[14] M. del Pino, *A priori estimates applications to existence-nonexistence for a semilinear elliptic system* , Indiana Univ. Math. J. 43 (1994) 77-129.

[15] J.M. B do Ó,*Existence of solutions for quasilinear elliptic equations*, J. Math. Anal. Appl. 207 (1997) 104–126.

[16] I. Ekeland,*On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl.47 (1974) 324-353.

[17] G. M. Figueiredo, *Existence of positive solutions for a class of p&q elliptic problems with critical growth on* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. 378 (2011) 507-518.

[18] G. M. Figueiredo, *Existence and multiplicity of solutions for a class of p&q elliptic problems with critical exponent*, Mathematische Nachrichten 286 (2013) 1129-1141.

[19] A. Gierer & H. Meinhardt,*A theory of biological pattern formation*, Kybernetik 12 (1972) 30-39.

[20] C. He & L. Gongbao, *The regularity of weak solutions to nonlinear scalar field elliptic equations containing p&q laplacians*, Ann. Acad. Scientiarum Fennicae, Math. 33 (2008) 337-371.

[21] P. Hess, *On multiple positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems*, Comm. Partial Diff. Eqs. 6(1981), N. 8, 951-961.

[22] N. Hirano, *Multiple solutions for quasilinear elliptic equations*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 15 (1990) 625-638.

[23] G. Li, X. Liang, *The existence of nontrivial solutions to nonlinear elliptic equation of p&q-Laplacians type on* $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Anal. 71 (2009) 2316-2334.

[24] G. M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. Theory. Methods and Applications, Vol. 12, No. 11, PP. 1203-1219, 1988.

[25] G.Q. Liu, Y.W. Wang & J.P. Shi, *Existence and nonexistence of positive solutions of semilinear elliptic equation with inhomogeneous strong Allee effect*, Appl. Math. - Engl. Ed. 30 (11)(2009) 1461-1468.

[26] N.H. Loc & K. Schmitt, *On positive solutions of quasilinear elliptic equations*. Diff. Int Eq. 22 (2009) 829-842

[27] C.D. Luning & W.L. Perry,*Positive solutions of negative exponent generalized Emden-Fowler boundary value problem*, SIAM J. Math. Anal. 12 (1981) 874-879.

[28] R.G. Nascimento, *Problemas elípticos não-locais do tipo p-Kirchhoff, Tese de Doutorado, Unicamp, 2008.*

[29] P.H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. 7 (1971) 487-513.

[30] S. Sakaguchi, *Concavity properties of solutions to some degerate quasilinear elliptic Dirichlet Problems*. Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa, Série 4, Vol 14 (1987) 403-421.

[31] C.A. Stuart, *Existence and approximations of solutions of nonlinear elliptic equations*, Math. Z. 147 (1976) 53-63.

[32] G. Sweers, *On the maximum of solutions for a semilinear elliptic problem*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 108A (1988) 357-370.

[33] S. Taliaferro, *A nonlinear singular boundary value problem*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.(1979) 897-904.

[34] S.H. Wang & N.D. Kazarinoff, *On positive solutions of some semilinear elliptic equations*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 50 (1991) 343-355.

[35] M. Wu, Z. Yang, *A class of p&q-Laplacian type equation with potentials eigenvalue problem in* $\mathbb{R}^N$, Bound. Value Probl. 2009 (2009), ID 185319.

[36] Z. Zhang, *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl. 194 (1995) 103-113.

[37] Z. Zhang, *Positive solutions of Lane-Emden systems with negative exponents: Existence, boundary behavior and uniqueness,* Nonlinear Anal. 74 (2011) 5544-5553.